

Pensieve Header: Verifying the B4 Syzygy.

```
Unprotect[NonCommutativeMultiply];
0**_ = 0;
_**0 = 0;
(c_?NumberQ * a_) ** b_ := Expand[c * (a ** b)];
a_ ** (c_?NumberQ * b_) := Expand[c * (a ** b)];
a_Plus ** b_ := (# ** b) & /@ a;
a_ ** b_Plus := (a ** #) & /@ b;
b[x_, y_] := x**y - y**x;
loc = {
  η[i_, j_, k_] => b[a[i, j], a[i, k]] + b[a[i, j], a[j, k]] + b[a[i, k], a[j, k]],
  γ[i_, j_, k_, l_] => b[a[i, j], a[k, l]]
};
glob = {
  η[i_, j_, k_] => Plus[
    b[a[i, j], a[i, k]] + b[a[i, j], a[j, k]] + b[a[i, k], a[j, k]],
    a[i, j] ** a[i, k] ** a[j, k] - a[j, k] ** a[i, k] ** a[i, j]
  ],
  γ[i_, j_, k_, l_] => b[a[i, j], a[k, l]]
};
syz = Plus[
  +b[η[2, 3, 4], +a[1, 2] + a[1, 3] + a[1, 4]],
  -b[η[1, 3, 4], -a[1, 2] + a[2, 3] + a[2, 4]],
  +b[η[1, 2, 4], -a[1, 3] - a[2, 3] + a[3, 4]],
  -b[η[1, 2, 3], -a[1, 4] - a[2, 4] - a[3, 4]],
  -b[γ[1, 2, 3, 4], a[1, 3] + a[1, 4] + a[2, 3] + a[2, 4]],
  +b[γ[1, 3, 2, 4], a[1, 2] + a[1, 4] - a[2, 3] + a[3, 4]],
  -b[γ[1, 4, 2, 3], a[1, 2] + a[1, 3] - a[2, 4] - a[3, 4]]
];
syz /. {η[i_, j_, k_] => ηi j k, γ[i_, j_, k_, l_] => γk li j}; (* failed *)
syz /. loc
0
```

syz /. glob

```

-a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[1, 4] ** a[3, 4] + a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[2, 3] ** a[1, 4] +
a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[2, 3] ** a[2, 4] + a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[2, 3] ** a[3, 4] -
a[1, 2] ** a[1, 4] ** a[2, 4] ** a[1, 3] - a[1, 2] ** a[1, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] +
a[1, 2] ** a[1, 4] ** a[2, 4] ** a[3, 4] - a[1, 2] ** a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[3, 4] +
a[1, 2] ** a[3, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 3] + a[1, 2] ** a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] +
a[1, 3] ** a[1, 2] ** a[1, 4] ** a[2, 4] + a[1, 3] ** a[1, 4] ** a[3, 4] ** a[1, 2] -
a[1, 3] ** a[1, 4] ** a[3, 4] ** a[2, 3] - a[1, 3] ** a[1, 4] ** a[3, 4] ** a[2, 4] -
a[1, 3] ** a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[3, 4] - a[1, 3] ** a[2, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 2] +
a[1, 3] ** a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] - a[1, 4] ** a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[2, 3] +
a[1, 4] ** a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 2] - a[1, 4] ** a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[3, 4] +
a[1, 4] ** a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] + a[2, 3] ** a[1, 2] ** a[1, 4] ** a[2, 4] -
a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 2] ** a[1, 4] - a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 2] ** a[2, 4] -
a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 2] ** a[3, 4] + a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 4] ** a[3, 4] -
a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 2] + a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[3, 4] ** a[1, 2] +
a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[3, 4] ** a[1, 3] + a[2, 3] ** a[2, 4] ** a[3, 4] ** a[1, 4] -
a[2, 3] ** a[3, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 3] - a[2, 4] ** a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[2, 3] +
a[2, 4] ** a[1, 3] ** a[1, 4] ** a[3, 4] + a[2, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 2] ** a[1, 3] +
a[2, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 2] ** a[2, 3] - a[2, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 2] ** a[3, 4] +
a[2, 4] ** a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 2] - a[2, 4] ** a[3, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 3] -
a[3, 4] ** a[1, 2] ** a[1, 3] ** a[2, 3] - a[3, 4] ** a[1, 2] ** a[1, 4] ** a[2, 4] -
a[3, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 3] ** a[1, 2] + a[3, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 3] ** a[2, 3] +
a[3, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 3] ** a[2, 4] + a[3, 4] ** a[2, 3] ** a[1, 3] ** a[1, 2] +
a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[1, 4] ** a[1, 2] - a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] ** a[1, 2] -
a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] ** a[1, 3] - a[3, 4] ** a[2, 4] ** a[2, 3] ** a[1, 4]

```