

Pensieve header: An attempt on the rank 2 (\mathcal{S}_3) Gassner representation.

```

In[*]:= Gi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
  ej  $\rightarrow$  etj ej + (1 - etj) ei
}]];
bas = {e1, e2, e3};
lhs = bas // G1,2 // G1,3 // G2,3;
rhs = bas // G2,3 // G1,3 // G1,2
Simplify@Thread[lhs == rhs]

Out[*]=
{e1, e1 - et1 e1 + et1 e2, e1 - et1 e1 + et1 e2 - et1+t2 e2 + et1+t2 e3}

Out[*]=
True

In[*]:= R2Gi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
  ej  $\rightarrow$  etj ej + (1 - etj) ei,
  fj  $\rightarrow$  esj fj + (1 - esj) fi,
  gj  $\rightarrow$  etj+sj gj + (1 - etj+sj) gi + (ai) ei (fj + ci fi) + (bi) fi (ej + di ei)
}]];
bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2G1,2 // R2G1,3 // R2G2,3;
rhs = bas // R2G2,3 // R2G1,3 // R2G1,2
Thread[bas  $\rightarrow$  Expand[lhs - rhs] // DeleteCases[_  $\rightarrow$  0] // Column
diff = Simplify[Last[lhs - rhs] /. {ai  $\rightarrow$  esi (-1 + eti), bi  $\rightarrow$  eti (-1 + esi), (c | d)_  $\rightarrow$  -1}]
Table[Factor[Coefficient[diff,  $\beta$ ] /. (e | f | g)_  $\rightarrow$  0], { $\beta$ , bas}] // DeleteCases[0] // Column

```

Out[*]=

$$\begin{aligned}
& \{ e_1, e_1 - e^{t_1} e_1 + e^{t_1} e_2, e_1 - e^{t_1} e_1 + e^{t_1} e_2 - e^{t_1+t_2} e_2 + e^{t_1+t_2} e_3, f_1, f_1 - e^{s_1} f_1 + e^{s_1} f_2, \\
& f_1 - e^{s_1} f_1 + e^{s_1} f_2 - e^{s_1+s_2} f_2 + e^{s_1+s_2} f_3, e_1 f_1, e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2, \\
& e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+s_2} e_1 f_2 + e^{s_1+s_2} e_1 f_3, e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1, \\
& e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2, \\
& e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+s_2} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + \\
& e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2 - e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_2 + e^{s_1+s_2} e_1 f_3 - e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_3 + e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_3, \\
& e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{t_1+t_2} e_2 f_1 + e^{t_1+t_2} e_3 f_1, \\
& e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 - e^{t_1+t_2} e_2 f_1 + e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_1 + \\
& e^{t_1+t_2} e_3 f_1 - e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2 - e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_2 + e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_2, \\
& e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 - e^{t_1+t_2} e_2 f_1 + e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_1 + \\
& e^{t_1+t_2} e_3 f_1 - e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+s_2} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2 - \\
& e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_2 - e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_2 + e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_2 f_2 + e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_2 - e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_3 f_2 + \\
& e^{s_1+s_2} e_1 f_3 - e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_3 + e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_3 - e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_2 f_3 + e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_3 f_3, \\
& g_1, a_1 c_1 e_1 f_1 + b_1 d_1 e_1 f_1 + b_1 e_2 f_1 + a_1 e_1 f_2 + g_1 - e^{s_1+t_1} g_1 + e^{s_1+t_1} g_2, \\
& a_2 e_1 f_1 - e^{s_1} a_2 e_1 f_1 - e^{t_1} a_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_1 + b_2 e_1 f_1 - e^{s_1} b_2 e_1 f_1 - e^{t_1} b_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_1 + \\
& a_1 c_1 e_1 f_1 + a_2 c_2 e_1 f_1 - e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_1 - e^{t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 + b_1 d_1 e_1 f_1 + b_2 d_2 e_1 f_1 - \\
& e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_1 - e^{t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{t_1} a_2 e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 e_2 f_1 + b_1 e_2 f_1 - e^{s_2+t_2} b_1 e_2 f_1 + \\
& e^{t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 + e^{t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 + e^{s_2+t_2} b_1 e_3 f_1 + e^{t_1} b_2 e_3 f_1 - \\
& e^{s_1+t_1} b_2 e_3 f_1 + a_1 e_1 f_2 - e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_2 + e^{s_1} b_2 e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_2 + e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_2 + \\
& e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_2 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_2 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 e_3 f_2 + e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_3 + \\
& e^{s_1} a_2 e_1 f_3 - e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_3 + e^{s_1+t_1} a_2 e_2 f_3 + g_1 - e^{s_1+t_1} g_1 + e^{s_1+t_1} g_2 - e^{s_1+s_2+t_1+t_2} g_2 + e^{s_1+s_2+t_1+t_2} g_3 \}
\end{aligned}$$

Out[*]=

$$\begin{aligned}
g_3 \rightarrow & -a_2 e_1 f_1 + e^{s_1} a_2 e_1 f_1 + e^{t_1} a_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_1 - b_2 e_1 f_1 + e^{s_1} b_2 e_1 f_1 + \\
& e^{t_1} b_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_1 - a_2 c_2 e_1 f_1 + e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_1 + e^{t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 - \\
& b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 - e^{t_1} a_2 e_2 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 e_2 f_1 - \\
& e^{t_2} b_1 e_2 f_1 + e^{s_2+t_2} b_1 e_2 f_1 - e^{t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 - e^{t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 + \\
& e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 + e^{t_2} b_1 e_3 f_1 - e^{s_2+t_2} b_1 e_3 f_1 - e^{t_1} b_2 e_3 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 e_3 f_1 - e^{s_2} a_1 e_1 f_2 + \\
& e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_2 - e^{s_1} b_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_2 - e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_2 - \\
& e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_2 + e^{s_2} a_1 e_1 f_3 - e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_3 - e^{s_1} a_2 e_1 f_3 + e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_3
\end{aligned}$$

Out[*]=

0

Out[*]=

$$\begin{aligned}
In[*]:= & \mathbf{R2G}_{i,j}[\mathcal{E}_-] := \mathbf{Expand}[\mathcal{E} /. \{ \\
& e_j \Rightarrow T_i e_j + (1 - T_i) e_i, f_j \Rightarrow S_i f_j + (1 - S_i) f_i, \\
& g_j \Rightarrow T_i S_i g_j + (1 - T_i S_i) g_i \\
& + (S_i + T_i - 2 S_i T_i) e_i f_i + S_i (T_i - 1) e_i f_j + T_i (S_i - 1) e_j f_i \}]
\end{aligned}$$

```
In[*]:= bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2G1,2 // R2G1,3 // R2G2,3;
rhs = bas // R2G2,3 // R2G1,3 // R2G1,2
lhs == rhs
```

```
Out[*]=
{e1, e1 - e1 T1 + e2 T1, e1 - e1 T1 + e2 T1 - e2 T1 T2 + e3 T1 T2, f1,
 f1 - f1 S1 + f2 S1, f1 - f1 S1 + f2 S1 - f2 S1 S2 + f3 S1 S2, e1 f1, e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f2 S1 S2 + e1 f3 S1 S2, e1 f1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f2 S1 S2 + e1 f3 S1 S2 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 -
 e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1 + e1 f2 S1 S2 T1 - e2 f2 S1 S2 T1 - e1 f3 S1 S2 T1 + e2 f3 S1 S2 T1,
 e1 f1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 - e2 f1 T1 T2 + e3 f1 T1 T2,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1 -
 e2 f1 T1 T2 + e3 f1 T1 T2 + e2 f1 S1 T1 T2 - e3 f1 S1 T1 T2 - e2 f2 S1 T1 T2 + e3 f2 S1 T1 T2,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f2 S1 S2 + e1 f3 S1 S2 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 -
 e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1 + e1 f2 S1 S2 T1 - e2 f2 S1 S2 T1 - e1 f3 S1 S2 T1 +
 e2 f3 S1 S2 T1 - e2 f1 T1 T2 + e3 f1 T1 T2 + e2 f1 S1 T1 T2 - e3 f1 S1 T1 T2 - e2 f2 S1 T1 T2 +
 e3 f2 S1 T1 T2 + e2 f2 S1 S2 T1 T2 - e3 f2 S1 S2 T1 T2 - e2 f3 S1 S2 T1 T2 + e3 f3 S1 S2 T1 T2, g1,
 g1 + e1 f1 S1 - e1 f2 S1 + e1 f1 T1 - e2 f1 T1 - 2 e1 f1 S1 T1 + e2 f1 S1 T1 + e1 f2 S1 T1 - g1 S1 T1 + g2 S1 T1,
 g1 + e1 f1 S1 - e1 f2 S1 + e1 f2 S1 S2 - e1 f3 S1 S2 + e1 f1 T1 - e2 f1 T1 - 2 e1 f1 S1 T1 + e2 f1 S1 T1 +
 e1 f2 S1 T1 - g1 S1 T1 + g2 S1 T1 - e1 f2 S1 S2 T1 + e2 f2 S1 S2 T1 + e1 f3 S1 S2 T1 - e2 f3 S1 S2 T1 +
 e2 f1 T1 T2 - e3 f1 T1 T2 - e2 f1 S1 T1 T2 + e3 f1 S1 T1 T2 + e2 f2 S1 T1 T2 - e3 f2 S1 T1 T2 -
 2 e2 f2 S1 S2 T1 T2 + e3 f2 S1 S2 T1 T2 + e2 f3 S1 S2 T1 T2 - g2 S1 S2 T1 T2 + g3 S1 S2 T1 T2}
```

```
Out[*]=
True
```

Satisfies OC:

```
In[*]:= lhs = bas // R2G1,2 // R2G1,3
rhs = bas // R2G1,3 // R2G1,2;
lhs == rhs
```

```
Out[*]=
{e1, e1 - e1 T1 + e2 T1, e1 - e1 T1 + e3 T1, f1, f1 - f1 S1 + f2 S1, f1 - f1 S1 + f3 S1,
 e1 f1, e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1, e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f3 S1, e1 f1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f3 S1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 - e1 f3 S1 T1 + e2 f3 S1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 T1 + e3 f1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f1 T1 + e3 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e3 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e3 f2 S1 T1,
 e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f3 S1 - e1 f1 T1 + e3 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e3 f1 S1 T1 - e1 f3 S1 T1 + e3 f3 S1 T1, g1,
 g1 + e1 f1 S1 - e1 f2 S1 + e1 f1 T1 - e2 f1 T1 - 2 e1 f1 S1 T1 + e2 f1 S1 T1 + e1 f2 S1 T1 - g1 S1 T1 + g2 S1 T1,
 g1 + e1 f1 S1 - e1 f3 S1 + e1 f1 T1 - e3 f1 T1 - 2 e1 f1 S1 T1 + e3 f1 S1 T1 + e1 f3 S1 T1 - g1 S1 T1 + g3 S1 T1}
```

```
Out[*]=
True
```

Lower Rank 2 Gassner:

```

In[*]:= {e_j => T_i e_j + (1 - T_i) e_i, f_j => S_i f_j + (1 - S_i) f_i,
         g_j => T_i S_i g_j + (1 - T_i S_i) g_i + S_i (T_i - 1) e_i (f_j - f_i) + T_i (S_i - 1) f_i (e_j - e_i)} /. {i -> j, j -> i}

Out[*]=
{e_i => T_j e_i + (1 - T_j) e_j, f_i => S_j f_i + (1 - S_j) f_j,
 g_i => T_j S_j g_i + (1 - T_j S_j) g_j + S_j (T_j - 1) e_j (f_i - f_j) + T_j (S_j - 1) f_j (e_i - e_j)}

In[*]:= LR2G_{i,j}_[E_] := Expand[E /. {e_i => T_j e_i + (1 - T_j) e_j, f_i => S_j f_i + (1 - S_j) f_j,
   g_i => T_j S_j g_i + (1 - T_j S_j) g_j
   + e_j f_j (S_j + T_j - 2 S_j T_j) + e_j f_i (-S_j + S_j T_j) + e_i f_j (-T_j + S_j T_j)}];
LR2G_{i,j}_[E_] := Expand[E /. {e_i => T_j^{-1} e_i + (1 - T_j^{-1}) e_j, f_i => S_j^{-1} f_i + (1 - S_j^{-1}) f_j,
   g_i => T_j^{-1} S_j^{-1} g_i + (1 - T_j^{-1} S_j^{-1}) g_j +
   e_j f_j (S_j^{-1} + T_j^{-1} - 2 T_j^{-1} S_j^{-1}) + e_j f_i (-S_j^{-1} + T_j^{-1} S_j^{-1}) + e_i f_j (-T_j^{-1} + S_j^{-1} T_j^{-1})}];
bas = {e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, e_1 f_1, e_1 f_2, e_1 f_3, e_2 f_1, e_2 f_2, e_2 f_3, e_3 f_1, e_3 f_2, e_3 f_3, g_1, g_2, g_3};
(bas // LR2G_{1,2} // LR2G_{1,2}) == bas
(bas // LR2G_{3,2} // LR2G_{3,2}) == bas
lhs = bas // LR2G_{1,2} // LR2G_{1,3} // LR2G_{2,3};
rhs = bas // LR2G_{2,3} // LR2G_{1,3} // LR2G_{1,2};
lhs == rhs

Out[*]=
True

Out[*]=
True

Out[*]=
True

```