In[∘]:=
```
Once[<< KnotTheory`]
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\Talks\\MoscowByWeb-2104"];
<< Alpha.m
<< Gamma.m
```

```
MultivariableAlexander[PD[X[1, 12, 2, 13], X[13, 2, 6, 3], X[8, 4, 9, 3],
    X[4, 10, 1, 9], X[6, 17, 7, 16], X[15, 8, 16, 7], X[14, 10, 15, 11],
    X[11, 17, 12, 14]] /. j_Integer /; j > 5 :> j - 1][T] /. T[j_] :> T_j
```

Out[∘]=
$$\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_2)\,(-1+T_3)}{\sqrt{T_1}\,\sqrt{T_2}\,\sqrt{T_3}}$$

In[∘]:=
```
𝒜[pd_PD] := 𝒜[List @@ (pd /. X[i_, j_, k_, l_] :>
      If[PositiveQ[X[i, j, k, l]], X_{i,j/.{1→0},k/.{1→0},l}, X̄_{i,j,k/.{1→0},l/.{1→0}}])];
𝒜[L_Knot | L_Link] := 𝒜[PD@L];
𝒜P[L_Knot | L_Link | L_PD] := Coefficient[𝒜[L][[4]], Wedge[]] /. Thread[
   τ_# & /@ (Skeleton@L /. Loop → Alternatives) → Table[t[i], {i, Length@Skeleton@L}]
  ]
```

In[∘]:=
```
𝒜[Knot[3, 1]]
```

KnotTheory: Loading precomputed data in PD4Knots`.

Out[∘]=
$$\mathcal{A}\Big[\{1\},\ \{0\},\ \langle|\ \xi_1\to\tau_1,\ x_0\to\tau_1\ |\rangle,\ \frac{\text{Wedge}[\,]}{\tau_1^{3/2}}-\frac{\text{Wedge}[\,]}{\sqrt{\tau_1}}+\sqrt{\tau_1}\ \text{Wedge}[\,]-\frac{x_0\wedge\xi_1}{\tau_1^{3/2}}+\frac{x_0\wedge\xi_1}{\sqrt{\tau_1}}-\sqrt{\tau_1}\ x_0\wedge\xi_1\Big]$$

In[∘]:=
```
𝒜P[Knot[3, 1]]
```

Out[∘]=
$$\frac{1}{t[1]^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{t[1]}}+\sqrt{t[1]}$$

In[∘]:=
$$\text{Table}\Big[\text{Simplify}\Big[\frac{\mathcal{A}\text{P}[L]\ /\ (1-t[1])}{\text{MultivariableAlexander}[L][t]}\Big],\ \{L,\ \text{AllLinks}[\{2,\ 9\}]\}\Big]$$

Power: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity: Indeterminate expression $\frac{0\ \text{ComplexInfinity}}{1-t[1]}$ encountered.

Out[#]=

$$\left\{\frac{\sqrt{t[2]}}{t[1]^{3/2}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}},\right.$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, -\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}},$$

$$\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}\ \sqrt{t[4]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}, \frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}\ \sqrt{t[4]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}\ \sqrt{t[4]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ t[3]}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{t[3]}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\left.-\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, \text{Indeterminate}, -\frac{t[3]}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}\right\}$$

In[∘]:=
```
Γ[pd_PD] := Γ[List @@ (pd /. X[i_, j_, k_, l_] ⧴
      If[PositiveQ[X[i, j, k, l]], X_{i,j/.{1→0},k/.{1→0},l}, X̄_{i,j,k/.{1→0},l/.{1→0}}])];
Γ[L_Knot | L_Link] := Γ[PD@L];
ΓP[L_Knot | L_Link | L_PD] := Γ[L]⟦4⟧ /. Thread[
   τ_# & /@ (Skeleton@L /. Loop → Alternatives) → Table[t[i], {i, Length@Skeleton@L}]
  ]
```

In[∘]:=
```
Γ[Knot[3, 1]]
```

Out[∘]= $\Gamma\left[\{1\}, \{0\}, \langle|\xi_1 \to \tau_1, x_0 \to \tau_1|\rangle, \frac{1-\tau_1+\tau_1^2}{\tau_1^{3/2}}, x_0\,\xi_1\right]$

In[∘]:=
```
ΓP[Knot[3, 1]]
```

Out[∘]= $\frac{1-t[1]+t[1]^2}{t[1]^{3/2}}$

In[∘]:= $\text{Table}\left[\text{Simplify}\left[\frac{\text{ΓP}[L]\,/\,(1-t[1])}{\text{MultivariableAlexander}[L][t]}\right], \{L, \text{AllLinks}[\{2, 9\}]\}\right]$

Power: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity: Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered.

General: Indeterminate is not a valid variable.

Part: Part specification Indeterminate⟦2⟧ is longer than depth of object.

Part: Part specification Indeterminate⟦1⟧ is longer than depth of object.

Part: Part 2 of {} does not exist.

Part: Part 1 of {} does not exist.

Power: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity: Indeterminate expression $\frac{0\ \text{ComplexInfinity}}{1-t[1]}$ encountered.

Out[$\circ$]=

$$\Big\{\frac{\sqrt{t[2]}}{t[1]^{3/2}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[3]}}, -\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}},$$

$$\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}\ \sqrt{t[4]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}, \frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}\ \sqrt{t[4]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}\ \sqrt{t[4]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}\ t[3]}, -\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{t[3]}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{\sqrt{t[2]}\ \sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{t[2]}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, \frac{1}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}},$$

$$-\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[2]}\ t[3]}{\sqrt{t[1]}}, -\frac{\sqrt{t[3]}}{\sqrt{t[1]}}, \text{Indeterminate}, -\frac{t[3]}{\sqrt{t[1]}\ \sqrt{t[2]}}\Big\}$$

In[∘]:= **Γ@Link[9, NonAlternating, 27]**

KnotTheory: Loading precomputed data in PD4Links`.

Power: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity: Indeterminate expression 0 ComplexInfinity encountered.

General: Indeterminate is not a valid variable.

Part: Part specification Indeterminate⟦2⟧ is longer than depth of object.

Part: Part specification Indeterminate⟦1⟧ is longer than depth of object.

Part: Part 2 of {} does not exist.

Part: Part 1 of {} does not exist.

Out[∘]= $\Gamma[\{1\}, \{0\}, \langle| x_0 \to \tau_1, \xi_1 \to \tau_1 |\rangle, 0, \{0\} \to \text{Indeterminate}[[2]]]$

In[∘]:= **𝒜@Link[9, NonAlternating, 27]**

Out[∘]= $\mathcal{A}[\{1\}, \{0\}, \langle| x_0 \to \tau_1, \xi_1 \to \tau_1 |\rangle, 0]$