

Pensieve header: An attempt on the rank 2 ( $\mathcal{S}_3$ ) Gassner representation.

```

In[*]:= Gi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
    ej  $\Rightarrow$  etj ej + (1 - etj) ei
}]];
bas = {e1, e2, e3};
lhs = bas // G1,2 // G1,3 // G2,3;
rhs = bas // G2,3 // G1,3 // G1,2
Simplify@Thread[lhs == rhs]

Out[*]=
{e1, e1 - et1 e1 + et1 e2, e1 - et1 e1 + et1 e2 - et1+t2 e2 + et1+t2 e3}

Out[*]=
True

In[*]:= R2Gi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
    ej  $\Rightarrow$  etj ej + (1 - etj) ei,
    fj  $\Rightarrow$  esj fj + (1 - esj) fi,
    gj  $\Rightarrow$  etj+sj gj + (1 - etj+sj) gi + (ai) ei (fj + ci fi) + (bi) fi (ej + di ei)
}]];
bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2G1,2 // R2G1,3 // R2G2,3;
rhs = bas // R2G2,3 // R2G1,3 // R2G1,2
Thread[bas  $\rightarrow$  Expand[lhs - rhs] // DeleteCases[_  $\rightarrow$  0] // Column
diff = Simplify[Last[lhs - rhs] /. {ai  $\Rightarrow$  esi (-1 + eti), bi  $\Rightarrow$  eti (-1 + esi), (c | d)_  $\rightarrow$  -1}]
Table[Factor[Coefficient[diff,  $\beta$ ] /. (e | f | g)_  $\rightarrow$  0], { $\beta$ , bas}] // DeleteCases[0] // Column

```

Out[\*]=

$$\left\{ \begin{aligned} &e_1, e_1 - e^{t_1} e_1 + e^{t_1} e_2, e_1 - e^{t_1} e_1 + e^{t_1} e_2 - e^{t_1+t_2} e_2 + e^{t_1+t_2} e_3, f_1, f_1 - e^{s_1} f_1 + e^{s_1} f_2, \\ &f_1 - e^{s_1} f_1 + e^{s_1} f_2 - e^{s_1+s_2} f_2 + e^{s_1+s_2} f_3, e_1 f_1, e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2, \\ &e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+s_2} e_1 f_2 + e^{s_1+s_2} e_1 f_3, e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1, \\ &e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2, \\ &e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+s_2} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + \\ &e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2 - e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_2 + e^{s_1+s_2} e_1 f_3 - e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_3 + e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_3, \\ &e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{t_1+t_2} e_2 f_1 + e^{t_1+t_2} e_3 f_1, \\ &e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 - e^{t_1+t_2} e_2 f_1 + e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_1 + \\ &e^{t_1+t_2} e_3 f_1 - e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2 - e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_2 + e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_2, \\ &e_1 f_1 - e^{s_1} e_1 f_1 - e^{t_1} e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} e_1 f_1 + e^{t_1} e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} e_2 f_1 - e^{t_1+t_2} e_2 f_1 + e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_1 + \\ &e^{t_1+t_2} e_3 f_1 - e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_1 + e^{s_1} e_1 f_2 - e^{s_1+s_2} e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} e_2 f_2 - \\ &e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_2 - e^{s_1+t_1+t_2} e_2 f_2 + e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_2 f_2 + e^{s_1+t_1+t_2} e_3 f_2 - e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_3 f_2 + \\ &e^{s_1+s_2} e_1 f_3 - e^{s_1+s_2+t_1} e_1 f_3 + e^{s_1+s_2+t_1} e_2 f_3 - e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_2 f_3 + e^{s_1+s_2+t_1+t_2} e_3 f_3, \\ &g_1, a_1 c_1 e_1 f_1 + b_1 d_1 e_1 f_1 + b_1 e_2 f_1 + a_1 e_1 f_2 + g_1 - e^{s_1+t_1} g_1 + e^{s_1+t_1} g_2, \\ &a_2 e_1 f_1 - e^{s_1} a_2 e_1 f_1 - e^{t_1} a_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_1 + b_2 e_1 f_1 - e^{s_1} b_2 e_1 f_1 - e^{t_1} b_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_1 + \\ &a_1 c_1 e_1 f_1 + a_2 c_2 e_1 f_1 - e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_1 - e^{t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 + b_1 d_1 e_1 f_1 + b_2 d_2 e_1 f_1 - \\ &e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_1 - e^{t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{t_1} a_2 e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 e_2 f_1 + b_1 e_2 f_1 - e^{s_2+t_2} b_1 e_2 f_1 + \\ &e^{t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 + e^{t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 - e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 + e^{s_2+t_2} b_1 e_3 f_1 + e^{t_1} b_2 e_3 f_1 - \\ &e^{s_1+t_1} b_2 e_3 f_1 + a_1 e_1 f_2 - e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_2 + e^{s_1} b_2 e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_2 + e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_2 + \\ &e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_2 - e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_2 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_2 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 e_3 f_2 + e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_3 + \\ &e^{s_1} a_2 e_1 f_3 - e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_3 + e^{s_1+t_1} a_2 e_2 f_3 + g_1 - e^{s_1+t_1} g_1 + e^{s_1+t_1} g_2 - e^{s_1+s_2+t_1+t_2} g_2 + e^{s_1+s_2+t_1+t_2} g_3 \} \end{aligned} \right.$$

Out[\*]=

$$g_3 \rightarrow -a_2 e_1 f_1 + e^{s_1} a_2 e_1 f_1 + e^{t_1} a_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_1 - b_2 e_1 f_1 + e^{s_1} b_2 e_1 f_1 + e^{t_1} b_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_1 - a_2 c_2 e_1 f_1 + e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_1 + e^{t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_1 - b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_1 + e^{t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 - e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_1 - e^{t_1} a_2 e_2 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 e_2 f_1 - e^{t_2} b_1 e_2 f_1 + e^{s_2+t_2} b_1 e_2 f_1 - e^{t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_2 f_1 - e^{t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_2 f_1 + e^{t_2} b_1 e_3 f_1 - e^{s_2+t_2} b_1 e_3 f_1 - e^{t_1} b_2 e_3 f_1 + e^{s_1+t_1} b_2 e_3 f_1 - e^{s_2} a_1 e_1 f_2 + e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_2 - e^{s_1} b_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 e_1 f_2 - e^{s_1} a_2 c_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} a_2 c_2 e_1 f_2 - e^{s_1} b_2 d_2 e_1 f_2 + e^{s_1+t_1} b_2 d_2 e_1 f_2 + e^{s_2} a_1 e_1 f_3 - e^{s_2+t_2} a_1 e_1 f_3 - e^{s_1} a_2 e_1 f_3 + e^{s_1+t_1} a_2 e_1 f_3$$

Out[\*]=

0

Out[\*]=

```

In[*]:= R2Gi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
  ej  $\rightarrow$  Ti ej + (1 - Ti) ei, fj  $\rightarrow$  Si fj + (1 - Si) fi,
  gj  $\rightarrow$  Ti Si gj + (1 - Ti Si) gi
  + Si (Ti - 1) ei (fj - fi) + Ti (Si - 1) fi (ej - ei) }];
bas =
{e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2G1,2 // R2G1,3 // R2G2,3;
rhs = bas // R2G2,3 // R2G1,3 // R2G1,2
lhs == rhs

Out[*]=
{e1, e1 - e1 T1 + e2 T1, e1 - e1 T1 + e2 T1 - e2 T1 T2 + e3 T1 T2, f1,
f1 - f1 S1 + f2 S1, f1 - f1 S1 + f2 S1 - f2 S1 S2 + f3 S1 S2, e1 f1, e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1,
e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f2 S1 S2 + e1 f3 S1 S2, e1 f1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1,
e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1,
e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f2 S1 S2 + e1 f3 S1 S2 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 -
e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1 + e1 f2 S1 S2 T1 - e2 f2 S1 S2 T1 - e1 f3 S1 S2 T1 + e2 f3 S1 S2 T1,
e1 f1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 - e2 f1 T1 T2 + e3 f1 T1 T2,
e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 - e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1 -
e2 f1 T1 T2 + e3 f1 T1 T2 + e2 f1 S1 T1 T2 - e3 f1 S1 T1 T2 - e2 f2 S1 T1 T2 + e3 f2 S1 T1 T2,
e1 f1 - e1 f1 S1 + e1 f2 S1 - e1 f2 S1 S2 + e1 f3 S1 S2 - e1 f1 T1 + e2 f1 T1 + e1 f1 S1 T1 -
e2 f1 S1 T1 - e1 f2 S1 T1 + e2 f2 S1 T1 + e1 f2 S1 S2 T1 - e2 f2 S1 S2 T1 - e1 f3 S1 S2 T1 +
e2 f3 S1 S2 T1 - e2 f1 T1 T2 + e3 f1 T1 T2 + e2 f1 S1 T1 T2 - e3 f1 S1 T1 T2 - e2 f2 S1 T1 T2 +
e3 f2 S1 T1 T2 + e2 f2 S1 S2 T1 T2 - e3 f2 S1 S2 T1 T2 - e2 f3 S1 S2 T1 T2 + e3 f3 S1 S2 T1 T2, g1,
g1 + e1 f1 S1 - e1 f2 S1 + e1 f1 T1 - e2 f1 T1 - 2 e1 f1 S1 T1 + e2 f1 S1 T1 + e1 f2 S1 T1 - g1 S1 T1 + g2 S1 T1,
g1 + e1 f1 S1 - e1 f2 S1 + e1 f2 S1 S2 - e1 f3 S1 S2 + e1 f1 T1 - e2 f1 T1 - 2 e1 f1 S1 T1 + e2 f1 S1 T1 +
e1 f2 S1 T1 - g1 S1 T1 + g2 S1 T1 - e1 f2 S1 S2 T1 + e2 f2 S1 S2 T1 + e1 f3 S1 S2 T1 - e2 f3 S1 S2 T1 +
e2 f1 T1 T2 - e3 f1 T1 T2 - e2 f1 S1 T1 T2 + e3 f1 S1 T1 T2 + e2 f2 S1 T1 T2 - e3 f2 S1 T1 T2 -
2 e2 f2 S1 S2 T1 T2 + e3 f2 S1 S2 T1 T2 + e2 f3 S1 S2 T1 T2 - g2 S1 S2 T1 T2 + g3 S1 S2 T1 T2}

Out[*]=
True

```