מבוא לאנליזה נומרית

המרצה: פרופ' ג'לרדן

ספרות

1. introduction to numerical analysis / atkinson
2. A first course in numerical analysis / ralston / rabinowitz

שאלות דקשור לפתרונות של בעיות באנליזה נומרית:

1. האם הפתרון ניתן לאלגוריתמיזציה
2. האם ניתן לפתור אנליטית שאלה (בעיה) נומרית זו
3. יעילות האלגוריתם (זמן, זכרון)
4. יציבות האלגוריתם
5. פשטות ההפעלה
6. מחיר
7. תועלת?

דוגמה

$$tg^{-1}u+tg^{-1}v=tg^{-1}\frac{u+v}{1-uv}$$

לכן:

$$\frac{\pi}{4}=tg^{-1}1/2+tg^{-1}1/3$$

לכן: השגיאה בחישוב לפי טיילור של הנוסחה למעלה יורדת בקצב של 3 אחת לפי 4^k

נגדיר שיטת החציה (bisection): כמו שהיה באינפי 1

שיטת המיתר הלא-נכון method of false position

רוצים לפתור $f(x)=0$, רק ש $[a,b]$ כך שיש בו
רק פתרון אחד וכן $f(a)\cdot f(b)<0$

שיטת $z_0=a$, $z_1=b$ $\cancel{z_{n+1}}$

$$z_{n+1}=z_n-\frac{z_k-z_{k-1}}{f(z_k)-f(z_{k-1})}\cdot f(z_k)$$

שיטת ניוטון רפסון $(N-R)$

$$z_{k+1}=z_k-\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

תרגיל: יהי נתון γ נחשב את $1/\gamma$ ע"י

$1<\gamma<2$, $\frac{1}{2}\le\frac{1}{\gamma}\le 1$ | נתחיל מ $z_0=3/4$

$$y(x)=\frac{1}{x}-\gamma$$

שלב 3 נמצא x שמאפס את $y(x)$

$$y'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

נציב $N-R$:

$$z_{k+1}=z_k-\frac{\frac{1}{z_k}-\gamma}{-\frac{1}{z_k^2}}=z_k(2-\gamma z_k)$$

נעיר ע"י כפל בלבד אפשר לעשות חילוק

נרצה להגדיל את הדיוק לסדר שני:

נקבל מהצורה ש

$$z_{k+1}=az_k+bz_k^2+cz_k^3$$

(בשיטה הקודמת $c=0$, $a=2$, $b=-\gamma$)

נניח ש

$$z_k=\frac{1}{\gamma}(1+\delta)$$

(1) $$z_{k+1}=\frac{a}{\gamma}(1+\delta)+\frac{b}{\gamma^2}(1+2\delta+\delta^2)+$$ נציב

$$+\frac{c}{\gamma^3}(1+3\delta+3\delta^2+\delta^3)=$$

ונקבל

$$= \frac{1}{\gamma} + O(\delta^3)$$

נבדוק:

$$\frac{\left|z_{k+1} - \frac{1}{\gamma}\right|}{\left|z_k - \frac{1}{\gamma}\right|} = \frac{O(\delta^3)}{O(\delta)} = O(\delta^2)$$

ננסה לפתור את המשוואות:

צריכים לקבל ב (1) שהמקדמים של δ
יהיו שווים בשני הצדדים:

$$\delta^0: \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma^2} + \frac{c}{\gamma^3} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\delta^1: \frac{a}{\gamma} + \frac{2b}{\gamma^2} + \frac{3c}{\gamma^3} = 0$$

$$\delta^2: \frac{b}{\gamma^2} + \frac{3c}{\gamma^3} = 0$$

נקבל:

$$a = 3$$
$$b = -3\gamma$$
$$c = \gamma^2$$

ולכן הקירוב יהיה

$$z_{k+1} = 3z_k - 3\gamma z_k^2 + \gamma^2 z_k^3$$

הגדרה שורש מרובה: ל $f(x)$ יש שורש מסדר $p\in\mathbb{N}$
בנקודה $\alpha\in\mathbb{R}$ אם $f(x)=(x-\alpha)^p g(x)$ כך ש
$g(\alpha)\neq 0$

נתפוס שלה למגוון כזה שורש לסקירות
$f(x)=a(x-\alpha)^p$. $x\to\alpha$

$$f'(x)=(x-\alpha)^{p-1}h(x)$$

כך ש $0\neq h(\alpha)$ כלומר לא יש שורש מסדר $p-1$

$$f''(x)=(x-\alpha)^{p-2}k(x)$$

כך ש $0\neq k(\alpha)$ ולכן ל f'' יש שורש מסדר $p-2$.

כלומר ל $f^{(p-1)}$ יש שורש פשוט בנקודה α

כלומר $f^{(p)}(\alpha)\neq 0$.

אז נפשר פיתוח טיילור מסביב לא נקבל:

$$f(x)=f(\alpha)+\dots\frac{(x-\alpha)^p}{p!}f^{(p)}(\alpha)=0+\dots 0+\frac{(x-\alpha)^p}{p!}f^{(p)}(\alpha)=$$

וזה שווה ל $g(x-\alpha)^p$ כאשר g מסדר p בשורש.

$$~~\alpha(x-\alpha)^p g(x)~~$$

$$f'(x)=p(x-\alpha)^{p-1}g(x)+(x-\alpha)^p g'(x)$$

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)g(x)}{pg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$$

$$F'(x)=1-\frac{g(x)}{pg(x)+(x-\alpha)g'(x)}-(x-\alpha)\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{p[g(x)+(x-\alpha)g'(x)}\right)$$

לכן

$$F'(\alpha)=\frac{p-1}{p}\neq 0$$

ולכן $N-R$ הוא כעת מסדר ראשון

דרגה 1 לפחות רק

ב) נקח $F(x)=x-p\frac{f(x)}{f'(x)}$ נקבל ש $F'(\alpha)=0$

נכון

$$\alpha-z_{k+1}=F(\alpha)-F(z_k)=(\alpha-z_k)F'(\alpha)+\tfrac{1}{2}(\alpha-z_k)^2F''(\eta_k)$$

ואילו $0=F'(\alpha)$ ולכן הקירוב הוא מסדר שני

7 אפשר להגדיר $u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ ואז $u(\alpha)=0$ מסדר ראשון

חסרון: אם f פי מסובכת, אזי u יותר מסובכת

אזי u' מאוד מסובכת...

8 שיטת אייטקן להאצה כללית של התכנסות ליניארית:

$$\alpha - z_{k+1} \underset{k\to\infty}{=} (\alpha - z_k)F'(\alpha)$$

ולכן

$$\frac{\alpha - z_{k+1}}{\alpha - z_k} \approx \lambda$$

ולכן

$$\frac{\alpha - z_{k+1}}{\alpha - z_k} \approx \frac{\alpha - z_{k+2}}{\alpha - z_{k+1}}$$

נחלץ את α ונקבל

$$\alpha \approx z_{k+2} - \frac{(z_{k+2}-z_{k+1})^2}{(z_k - z_{k+1})-(z_{k+1}-z_{k+2})}$$

ולכן לאחר שעשינו $k+2$ קירובים, אפשר להפעיל אותה ולקבל קירוב טוב ל-α.

שאלה: אין [illegible] את 3 המקומות בו x קרוב

לאחר של מה קורה? אפשר

$$\frac{z_{k+2}-z_{k+1}}{z_{k+1}-z_k} \approx \frac{z_{k+3}-z_{k+2}}{z_{k+2}-z_{k+1}}$$

דוגמא: קירוב ל $\sqrt{3}$ $z_{k+1} = z_k - \frac{1}{4}(z_k^2-3)$

$$\alpha = \sqrt{3} = 1.7320508$$

k	z_k	$z_k - z_{k-1}$	יח'
0	2.0	—	—
1	1.75	−2.5E−1	
2	1.73435	−1.56E−2	0.0625
3	.	−2.01E−3	.129
4	.	−2.068E−4	.133
5	1.7320564	−3.60E−5	.134
		−4.82E−6	0.134
			.134

נקבל $a_5 = 1.73205086$ (איטקן 5)

$$\alpha - z_5 = -5.56E-6$$

$$\alpha - a_5 = -8.46E-8$$

אפשר לראות ש-a_5 טוב יותר מ-z_5

הגדרה: מטריצה של ון-דר-מונדה:

$$V_n(\{x_n\}) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & & & \\ 1 & x_2 & & & \\ 1 & x_3 & & & \\ 1 & x_4 & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{pmatrix}$$

טענה:

$$|V_n(\{x_n\})| = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

הוכחה באינדוקציה: עבור $n=1$ זה נכון טריוויאלית.
נניח נכון עבור n

$$|V_{n-1}(\{x_n\})| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0\le j<i\le n-1} (x_i - x_j)$$

[illegible]

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix} = A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

ה: הפולינום של [illegible] $V_n(x)$

כמובן, המקדם של x^n מצד ימין הוא A ומצד שמאל הוא $V_{n-1}(\{x_n\})$ ולכן $A=V_{n-1}(\{x_n\})$ וקיבלנו

מ.ש.ל.

משפט (משפט האינטרפולציה): תהיינה נקודות $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ אזי קיים פולינום $p(x)$ כך ש $\deg(p)\le n$, וכן $p(x_i)=y_i \ \forall i$ אם $x_i=x_j \Rightarrow i=j$, ובנוסף, אותו פולינום הוא יחיד.

הגדרה

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

טענה

$$l_i(x_j)=\delta_{ij}$$

הגדרה יהיו $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{n}$ נגדיר

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

טענה

$$\forall i \qquad p(x_i)=y_i$$

צורת ניוטון לפולינום האינטרפולציה (דרגת הפרשים מחולקים)

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+c(x)$$

$$c(x_i)=P_n(x_i)-P_{n-1}(x_i)=0 \quad i=$$

$$a_n \equiv f[x_0, x_1, \ldots x_n]$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n]$$

על מנת לחשב את ההפרש המחולק נעזר בנוסחת לגרנז' עבור $P_n(x)$:

$$\psi_n(x) = (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

$$\psi_n'(x_i) = (x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)$$

נוסחת לגרנז' עבור X שאינו נקודת דגימה x_i:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\psi_n(x) f(x_j)}{(x-x_j)\psi_n'(x_j)}$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\psi_n'(x_j)} \qquad *$$

מתוך * ניתן להראות:

$$** \qquad f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots x_n] - f[x_0, \ldots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

הוכחה

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\psi_n'(x_j)}$$

$$f[x_0 \ldots x_{n-1}] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\psi_{n-1}'(x_j)}$$

$$f[x_1, \ldots x_n] = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)(x_j - x_0)}{\psi_n'(x_j)}$$

נקבל את הנוסחה של (**):

$$F[x_1 \dots x_n] - F[x_0 \dots x_{n-1}] = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)(x_j - x_0)}{\psi'_n(x_j)} + \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{\psi'_n(x_n)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\psi'_{n-1}(x_j)} - \frac{f(x_0)}{\psi'_{n-1}(x_0)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)(x_j - x_0)}{\psi'_n(x_j)} - \frac{f(x_j)(x_j - x_n)}{\psi'_{n-1}(x_j)(x_j - x_n)}$$

$$+ \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{\psi'_n(x_n)} - \frac{f(x_0)(x_0 - x_n)}{\psi'_{n-1}(x_0)(x_0 - x_n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j)}{\psi'_n(x_j)} \left[(x_j - x_0) - (x_j - x_n)\right] +$$

$$+ \frac{f(x_n)(x_n - x_0)}{\psi'_n(x_n)} + \frac{f(x_0)(x_n - x_0)}{\psi'_n(x_0)} = \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\psi'_n(x_j)}\right](x_n - x_0)$$

[illegible] מש״ל.

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) F[x_0 \dots x_n]$$ ונקבל

$$P_0(x) = f(x_0)$$

$$F[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$F[x_0, x_1, x_2] = \frac{F[x_1, x_2] - F[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right] =$$

אם $x_2 - x_1 = h = x_1 - x_0$ אז:

$$= \frac{1}{2h^2} \cdot \left[f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)\right]$$

$$P_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)F[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)F[x_0, x_1, x_2]$$

דגורה כללית:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\dots+(x-x_0)()\dots(x-x_{n-1})f[x_0,\dots,x_n]$$

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+(x-x_0)\dots(x-x_n)f[x_0,\dots x_n,t]$$

$$P_{n+1}(t)=f(t)=(t-x_0)\dots(t-x_n)f[x_0,\dots,x_n,t]$$

אינטרפולציית הרמיט: נתונים

x_i, y_i, y'_i $i=1,\dots,n$

מחפשים פולינום P מדרגה $2n-1$ כך ש

$$P(x_i)=y_i\ ,\ P'(x_i)=y'_i$$

אנחנו נטפל במקרה הפרטי שבו $n=2$, ונסמן

$x_1=a$, $x_2=b$ ונקבל:

$$H_2(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)^2f[a,a,b]+$$
$$+(x-a)^2(x-b)f[a,a,b,b]$$

כאשר:

$$f[a,a,b]=\frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}$$

$$f[a,a,b,b]=\frac{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)}{(b-a)^2}$$

ונקבל:

$$f(x)-H_2(x)=(x-a)^2(x-b)^2f[a,a,b,b,x]=$$
$$=\left[(x-a)^2(x-b)^2/24\right]f^{(4)}(\eta)$$

כאשר

$$a\le\eta\le b$$

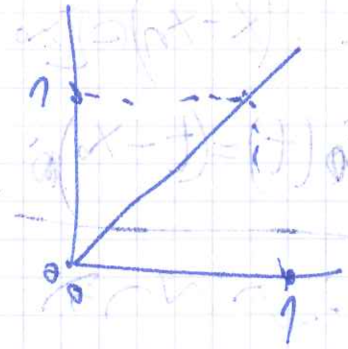
$$\max_{[a,b]}|f(x)-H_2(x)|=\frac{(b-a)^4}{384}\cdot\max_{[a,b]}f^{(4)}(\eta)$$ ולכן

דוגמא:

$a=0$, $f(a)=0$

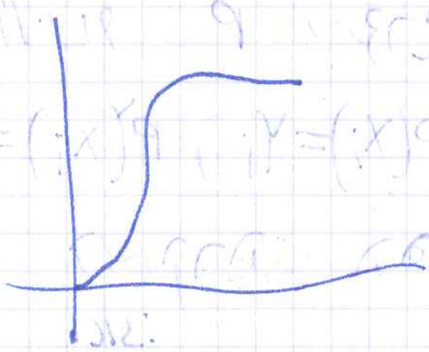
$b=1$, $f(b)=1$

אינטרפולציית הרמיט:



נתון גם $f'(0)=1$ אז הגרף ישר כזה

נתון גם $f'(b)=0$ האינטרפולציה תהיה אינטואיטיבית



נחשב:

$$f[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=1$$

$$f[a,a,b]=\frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}=0$$

$$f[a,a,b,b]=\frac{f'(b)-2f[a,b]+f'(a)}{(b-a)^2}=-1$$

והפולינום:

$$H_2(x)=x+x^2-x^3$$

דוגמא: מזערים קירוב עבור $f(x)=e^x$ על $[-1,1]$

n	$\|f-p_n\|$	$\|f-g_n^*\|$	יחס
1	0.718	0.279	0.379
2	0.218	0.0450	0.206
3	0.0516	0.00553	0.107

כאשר $\|f-g\|=\max|f-g|$

וכאשר g_n^* — קירוב המינימקס

f — קירוב טיילור

קירוב הריבועים הפחותים (least squares approx. LS)

נגדיר נורמה חדשה: נורמת L_2 לקטע $[a,b]$ של פונקציה $g(x)$

$$\|g\|_{L_2}=\|g\|_2=\left[\int_a^b |g|^2\,dx\right]^{1/2}$$

תכונה 1: $\|g\|_2=0 \iff g\equiv 0$

תכונה 2: $|\alpha|\|g\|_2=\|\alpha g\|_2$

תכונה 3: $\|g+h\|_2\le\|g\|_2+\|h\|_2$

הגדרה: עבור $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$

$$M_n(f)=\inf\{\|f-r\|_2 \mid r\in\mathbb{R}[x],\ \deg r\le n\}$$

נחלק את $[a,b]$ ל-m תתי-קטעים, ונסמן לנקודות האמצעיות של תתי-הקטעים:

$$x_j=a+\left(j-\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{b-a}{m}\right)$$

נגדיר

$$E=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[f(x_j)-r(x_j)]^2\right]^{1/2}$$

ניתן להראות ש

$$E=\|f-r\|_2/\sqrt{b-a}$$

<u>דוגמא:</u> $f=e^x$, $[a,b]=[-1,1]$

~~נמצא~~ נחפש ל $r_1(x)=b_0+b_1x$

נעשה מינימיזציה על $\|f-r_1\|_2^2$:

$$\|f-r_1\|_2^2=\int_{-1}^{1}(e^x-b_0-b_1x)^2\,dx=F(b_0,b_1)$$

~~נעשה~~ נעשה מינימיזציה על F:

(ע״י גזירה הנגזרות:)

$$0=\frac{\partial F}{\partial b_0}=\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial b_0}(e^x-b_0-b_1x)^2=-2\int_{-1}^{1}(e^x-b_0-b_1x)\,dx$$

$$0=\frac{\partial F}{\partial b_1}=\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial b_1}(e^x-b_0-b_1x)\,dx=2\int_{-1}^{1}(e^x-b_0-b_1x)(-x)\,dx$$

מקבלים:

$$b_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^x\,dx\cong 1.1752$$

$$b_1=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}e^x x\,dx=\frac{3}{e}\cong 1.1036$$

לכן

$$r_1=1.1752+1.1036x$$

קירוב המינימקס קיבלנו:

$$q_1=1.2643+1.1752x$$

מקבלים

$$\|e^x-r_1^*\|_\infty=0.44$$

כעת: LS המוכלל: נתונות הפונקציות $f(x), w(x)$ משקל. נמצא פולינום $r(x)$ כך שהקטן יהיה מינימלי:

$$\int_a^b[f(x)-r(x)]^2w(x)\,dx$$

נניח $w(x)$ קיימת התכונות:

1. לכל $n\geq 0$ $\int_a^b w(x)|x|^n\,dx<\infty$

2

g רציפה, $\int_a^b w(x)g(x)dx=0,\ g\ge 0 \Rightarrow g=0$

דוגמאות:

1. $w(x)=1 \qquad a\le x\le b$
2. $w(x)=e^{-x} \qquad 0\le x<\infty$
3. $w(x)=e^{-x^2} \qquad -\infty<x<\infty$
4. $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x\in[-1,1]$

ננסה למצוא פולינום $r_n=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$: (ניתן למצוא)
מינימום לפונקציה:

$$F(a_0,\dots,a_n)=\int_a^b w(x)\left[f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right]^2 dx$$

נדרוש: $\frac{\partial F}{\partial a_i}=0$ ונקבל את המשוואות:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \int_a^b w(x)x^{i+j}dx=\int_a^b f(x)w(x)x^i dx \qquad i=0,\dots,n$$

נקח את המקרה $w(x)=1$, $[a,b]=[0,1]$ ונקבל

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{1+i+j}=\int_0^1 f(x)x^i \qquad i=0,\dots,n$$

זהו: מערכת משוואות ~~מא~~ $(n+1)\times(n+1)$
המטריצה הפותרת את המשוואה הזו מאוד
קשה להפיכה (מקדמים חישוביים).

<u>פולינומים אורתוגונליים:</u>

נגדיר מכפלה פנימית A של הפונקציות:

$$(f,g)=\int_a^b f g w\, dx$$

כאשר w לקוחה מהסוג הקודם

<u>תכ'.</u> $(\gamma f,g)=(f,\gamma g)=\gamma(f,g)$

$(f_1+f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ ג. אז

$(f, g) = (g, f)$ שנה

$(f, f) \geq 0$ ואז

$(f, f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ שנה

מכפלה פנימית

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$$

הגדרה: f ו-g יקראו אורתוגונליות אם $(f,g)=0$

הגדרה: סדרה של פולינומים $\{P_n\}$ תקרא אורתוגונלית...

$$\deg(P_n) = n$$

$$(P_n, P_m) = \delta_{mn} \dots$$

וכן המקדם של x^n ב-P_n חיובי.

דוגמאות: ① הפולינומים של לגר: $w(x) = e^{-x}$ $[a,b] = [0, \infty)$

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^n e^{-x} \right] \quad n \geq 0$$

נוכיח: מערכת אורתונורמלית של פולינומים.

② הפולינומים של לז'נדר $w(x) = 1$ $[a,b] = [-1, 1]$

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \right] \quad n \geq 1$$

$$P_0(x) = 1$$

③ הפולינומים של צ'בישב: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $[a,b] = [-1, 1]$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

נוכיח: משפחה אורתוגונלית $\deg T_n = n$

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1$$

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x$$

משפט: תהי $\{f_n(x)\}_0^{\infty}$ מערכת אורתוגונלית של פולינומים כך ש-$\deg f_n = n$ לכל n. אז $f \in \mathbb{R}[x]$ ...

$$F=\sum_{n=0}^{\deg F}\frac{(F,F_n)}{(F_n,F_n)}F_n$$

משפט: יהיו $\{F_n\}_0^\infty \subset \mathbb{R}[x]$ אורתוגונליים כך ש $\deg F_n=n$. אז:

לכל n, ל-F_n יש בדיוק n שורשים בקטע הפתוח (a,b), כי הפונקציה המשקל W מקיימת $W(x)\neq 0$ ב-$[a,b]$

הוכחה: יהיו $x_1,\ldots,x_m$ שורשים של F_n אשר מקיימים

א) $a<x_i<b$

ב) F_n מחליף סימן בקו x_i

ברור ש $m\le n$. נניח ש $n>m$. נגדיר

$$B(x)=(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)$$

אזי הפולינום $(F_nB)(x)$ אינו מחליף סימן בקטע.

נכתוב את F_n בצורה

$$F_n=h\cdot(x-x_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{r_m}$$

כאשר $h\in\mathbb{R}[x]$ אין שורשים מקיימים א) או ב).

מאחר ו-F_nB אינו מחליף סימן מתקיים ש $\{r_i\}_1^m\subset 2\mathbb{Z}+1$. כמו כן

$$\int_a^b w(x)B(x)F_n(x)\,dx\neq 0$$

מצד שני $\deg B=m<n$ ולכן

$$\int_a^b w(x)B(x)F_n(x)\,dx=(B,F_n)=0$$

מהאורתוגונליות של הקבוצה $\{F_n\}$

סתירה, ולכן $n=m$.

הכנה למשפט: יהיו $\{\varphi_n\}$ אורתונורמליים ב-$[a,b]$ (O.N.) עם $W(x)\ge 0$. נגדיר A_n, B_n ע"י:

$$\varphi_n=A_nx^n+B_nx^{n-1}+\ldots$$

אז

$$\varphi_n(x)=A_n(x-x_{1,n})\cdots(x-x_{n,n})$$

$$A = \sum_{n=0} \frac{(f_n, f_n)}{(f_n, f_n)} A_n$$

נגדיר $\gamma_n = (\varphi_n, \varphi_n) > 0$, $a_n = \frac{A_{n+1}}{A_n}$

~~משפט~~ משפט ∆: (נוס' הרקורסיה המשולשת): עבור $\varphi_n(x)$

כנ"ל $(n \geq 1)$

$$\varphi_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)\varphi_n(x) - c_n \varphi_{n-1}(x)$$

כאשר

$$b_n = a_n\left[\frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{B_n}{A_n}\right]$$

$$c_n = \frac{A_{n+1}A_{n-1}}{A_n^2} \cdot \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}$$

<u>הוכחה</u>: נתבונן בפולינום

$$a(x) = \varphi_{n+1}(x) - a_n x \varphi_n(x) =$$

$$= A_{n+1}x^{n+1} + B_{n+1}x^n + \ldots - \frac{A_{n+1}}{A_n}x\left(A_n x^n + B_n x^{n-1} + \ldots\right) \stackrel{!}{=}$$

$$= (B_{n+1} - A_{n+1}B_n/A_n)x^n + \ldots$$

ולכן מעלת $n \geq a(x)$.

לפי משפט 2 פס' ניתן לפרק כל פולינום ע"י

קומבינציה לינארית של פולינומים אורתוגונליים:

$$a(x) = d_n \varphi_n(x) + d_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \ldots + d_0 \varphi_0(x)$$

כאשר שוב לפי 2 פס'

$$d_i = \frac{(a, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = \frac{1}{\gamma_i}\left(\varphi_{n+1} - a_n x \varphi_n, \varphi_i\right) = \frac{1}{\gamma_i}\left[(\varphi_{n+1}, \varphi_i) - a_n(x\varphi_n, \varphi_i)\right]$$

עבור $i \leq n$ $(\varphi_{n+1}, \varphi_i) = 0$, $i \leq n-2$:

$$(x\varphi_n, \varphi_i) = \int_a^b x\,w(x)\,\varphi_n(x)\varphi_i(x)\,dx = 0$$

ולכן $d_i = 0$ לכל $0 \leq i \leq n-2$

ולכן

$$G(x) = d_n \varphi_n(x) + d_{n-1}\varphi_{n-1}(x) = \varphi_{n+1}(x) - a_n x \varphi_n(x)$$

ולכן

$$\varphi_{n+1}(x) = (a_n x + d_n)\varphi_n(x) + d_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

תרגיל: הוכח כי

$$d_n = b_n$$
$$d_{n-1} = c_n$$

נחזור לבעיית הקירוב ע״י ריבועים פחותים (LSA)

תהי $\{\varphi_n\}$ משפחה של אורתונורמליות $\left((\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{nm}\right)$

יהי $r(x)$ פולינום ממעלה n

$$r(x) = b_0\varphi_0 + b_1\varphi_1 + \dots b_n\varphi_n$$

עבור $f \in C[a,b]$ נגדיר

$$G(b_0 \dots b_n) = \|f-r\|_2^2 = \int_a^b w(x)\left[f(x) - \sum_{j=0}^{n} b_j\varphi_j(x)\right]^2 dx$$

אפשרות למצוא מינימום ע״י

$$\frac{\partial G}{\partial b_i} = 0 \qquad i=0,\dots,n$$

קל לראות ש

$$0 \le G = \left(f - \sum_{j=0}^{n} b_j\varphi_j,\ f - \sum_{j=0}^{n} b_j\varphi_j\right) =$$

$$= (f,f) - 2\sum_{j=0}^{n} b_j(f,\varphi_j) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_j b_i(\varphi_i,\varphi_j) = \|f\|_2^2 - 2\sum_{j=0}^{n} b_j(f,\varphi_j) + \sum_{j=0}^{n} b_j^2 =$$

$$= \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^{n}(f,\varphi_j)^2 + \sum_{j=0}^{n}\left[(f,\varphi_j) - b_j\right]^2 \underset{\text{חיובית}}{\ge} 0$$

קל לראות מתקבל מינימום כאשר

$$\forall j \qquad b_j = (f,\varphi_j)$$

ולכן קירוב ה LS קיים, הוא יחיד, ונתון ע״י

$$r_n^* = \sum_{j=0}^{n}(f,\varphi_j)\varphi_j(x)$$

$$G_{min} = \|f - r_n^*\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^{n}(f,\varphi_j)^2 = \|f\|_2^2 - \|r_n^*\|_2^2$$ אז

שלב 6

$$r^*_{n+1}(x) = r^*_n(x) + (f,\varphi_{n+1})\varphi_{n+1}(x)$$

משפט: אם $[a,b]$ סופי, אז $\lim_{n\to\infty}\|f-r_n^*\|_2 = 0$

הוכחה: לכל i

$$\|r_i^* - f\|_2 \ge \|f - r_{i+1}^*\|_2$$

נקח $\epsilon>0$. לפי ויירשטראס קיים $Q\in\mathbb{R}[x]$ כך ש

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-Q(x)| \le \frac{\epsilon}{c} \qquad c^2=\int_a^b w(x)\,dx$$

נסמן $m=\deg Q$. אז לכל $n\ge m$

$$\|f-r_n^*\|_2 \le \|f-r_m^*\|_2 \le \|f-Q\|_2 =$$

$$= \sqrt{\int_a^b w(f-Q)^2\,dx} \le \sqrt{\int_a^b w\,dx\cdot\left(\frac{\epsilon}{c}\right)^2} = \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

מש"ל

משפט: אי-שוויון בסל

$$\sum_{j=0}^{n}(f,\varphi_j)^2 \le \|f\|_2^2$$

משפט: שוויון פרסבל

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty}(f,\varphi_j)^2$$

תרגיל: $n>0$ נגדיר

$$\tau_n = \inf_{\deg Q\le n-1}\ \max_{-1\le x\le 1}|x^n+Q(x)|$$

צ"ל τ_n שמתקבל כאשר לוקחים

$$x^n+Q(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$$

T_n - פולינום צ'בישב

$$\tau_n = 1/2^{n-1}$$

צ"ל

הוכחה: $T_0=1$, $T_1=x$, $T_{n+1}=2xT_n-T_{n-1}$ ולכן $T_n(x)=2^{n-1}x^n+\dots$

כמו שראינו $T_n=\cos(n\cos^{-1}x)$ ונזכיר ש-T_n מקבל

אז ערכי הקיצון ±1 בנקודות:

$$x_j = \cos\frac{j\pi}{n} \qquad j=0,\dots,n$$

ואז

$$T_n(x_j) = (-1)^j$$

וכן

$$-1 = x_n < \dots < x_1 < x_0 = 1$$

כמו כן:

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

ולכן

$$\tau_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

נניח $\tau_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ אז קיים $M(x)=x^n+\tilde{Q}(x)$ כך ש $\tau_n \le \max_{x\in[-1,1]} |M(x)| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. נגדיר כעת $R(x)=\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}-M(x)$.

ברור ש $\deg R(x) \le n-1$. נתבונן כעת בנקודות $\{x_j\}$:

$$R(x_j) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x_j) - M(x_j) = (-1)^j/2^{n-1} - M(x_j) = (-1)^j\left[\frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^j M(x_j)\right]$$

הנחנו ש $M(x) < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ולכן מה שבסוגריים גדול מ-0, ולכן $\mathrm{sgn}\, R(x_j) = (-1)^j$ ולכן יש ל-R $n+1$ חילופי סימן, בסתירה לדרגת R. ולכן $\tau_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ מתקבל עבור $T_n/2^{n-1} = x^n + Q(x)$

מ.ש.ל.

ייעול טורי טיילור ע"י צבישב

נניח שיש פיתוח טיילור מסדר $n=N$ עבור f. בקטע $[a,b]$. השגיאה שעבורו $< \epsilon$. נניח ע"י כך שנקבל $P_n(x)$ כך ש

$$\|f-P_n(x)\|_\infty \le \epsilon_1 \quad \text{(ע"פ טיילור)}$$

נרצה את $P_n(x)$ לקרב ע"י M יותר נמוך מדרגה n-1 כך ש $\|P_n - M\|_\infty \le \epsilon_2$. ואז נקבל:

$$\|f-M\|_\infty=\|(f-P_n)+(P_n-M)\|_\infty\le\|f-P_n\|_\infty+\|P_n-M\|_\infty\le\epsilon_1+\epsilon_2$$

נדרוש: $\epsilon_1+\epsilon_2<\epsilon$.

ואכן כעת נבדוק את המקרה של $P_n(x)$ שאינו
הפונקציה פולינום כלשהו. נבחר M כך ש-$\deg M\le n-1$
ומן $\max_{-1\le x\le 1}|P_n-M|$ קטן ככל האפשר.

נגדיר:

$$E_n(x)=P_n(x)-M(x)=[a_nx^n+\underbrace{a_{n-1}x^{n-1}+\dots}_{P_{n-1}}]-M(x)=$$

$$=a_nx^n+P_{n-1}(x)-M(x)=a_n\left[x^n+\frac{P_{n-1}(x)-M(x)}{a_n}\right]$$

וכן:
$$\|E_n\|_\infty=|a_n|\left\{\max_{-1\le x\le 1}\left|x^n+\frac{P_{n-1}-M(x)}{a_n}\right|\right\}$$

לפי המשפט הקודם, המינימום של $\|E_n\|_\infty$ (שאנו מנסים למצוא) מתקבל כאשר

$$\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)=x^n+\frac{P_{n-1}(x)-M(x)}{a_n}$$

מכאן נקבל

$$M(x)=a_nx^n+P_{n-1}(x)-\frac{a_n}{2^{n-1}}T_n(x)=P_n(x)-\frac{a_n}{2^{n-1}}T_n(x)$$

ואז נקבל:
$$\|P_n(x)-M(x)\|_\infty=\frac{|a_n|}{2^{n-1}}$$

<u>משפט</u> (נוסח) התנודות השוות של צ'בישב: תהי
$f\in C^1[a,b]$ (בערך). ו-$q_n^*(x)$ פול' מדרגה $\le n$ ועבורו $\rho_n(f)=\|f-q_n^*\|_\infty$
וכן מתקיים: שיש לפחות $n+2$ נקודות
$a\le x_0<x_1<x_2\dots<x_{n+1}\le b$ אשר בהן
$f(x_j)-q_n^*(x_j)=\sigma(-1)^j\rho_n(f)$ כאשר $\sigma=\pm1$.

האלגוריתם של רמז על הקטע $[-1,1]$:

R1 קח $n+2$ נקודות בקטע:

$$-1 \le x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \le 1$$

מצא פולינום $q(x)$ ממעלה $\le n$ ומקיים

$$f(x_i) - q(x_i) = (-1)^i E$$

$E \ne 0$. (זוהי מערכת של $n+2$ משוואות לינאריות עבור $n+1$ מקדמים $(a_0, \dots, a_n)$ של $q(x)$ ו-E.)

R2 לאחר שמצאנו את $q(x)$ (כלומר את $(a_0, \dots, a_n)$) חשב $n+2$ נקודות בעלות תכונות

$$-1 \le z_0 < \dots < z_{n+1} \le 1$$

נדרוש אקסטרמום לוקלי כלומר לכל z_i יש מקסימום או מינימום לוקלי כך ש

$$\text{sign}[f(x_i) - q(x_i)] = \text{sign}[f(z_i) - q(z_i)]$$

וגם

$$f'(z_i) - q'(z_i) = 0$$

R3 נבדוק:

$$M \triangleq \max_i |f(z_i) - q(z_i)|$$

ע"פ משפט [illegible]

אז נקבל

$$m = \min_i |f(z_i) - q(z_i)| \le \rho_n(f) \le M$$

כאשר $\rho_n(f)$ ~~שגיאת~~ הקירוב המינימקס המינימלית שאפשר להגיע אליה עבור הפונקציה f ע"י פולינום ממעלה $\le n$.

עבור ה-ϵ שניתן נתון מראש: אם $M/m \le 1+\epsilon$ עצור. אחרת נקרא ל-z_i x_i ונחזור ל-R1.

הערות:

1) לבחור נקודות:

$$x_j=-\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \quad j=0,\dots,n+1$$

בבחירה התחלתית

2) ההתכנסות של התהליך (לא) ריבועית

דוגמה:

מצא קירוב מינימקס ל-e^x בקטע $[-1,1]$ ע״י פולינום ממעלה שניה בקירוב.

$$x_0=-1,\ x_1=-\tfrac{1}{2},\ x_2=\tfrac{1}{2},\ x_3=1$$

$$p=a_0+a_1x+a_2x^2$$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$e^{-1}-a_0+a_1-a_2=E$$
$$e^{-1/2}-a_0+\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{4}a_2=-E$$
$$e^{1/2}-a_0-\tfrac{1}{2}a_1-\tfrac{1}{4}a_2=E$$
$$e-a_0-a_1-a_2=-E$$

נקבל:

הגדרה

$$f(x) \sim g(x)\left[1 + a_1(x) + a_2(x) \dots \right]$$

יש פתרון אסימפטוטי עבור $x \to \infty$ אם מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad (2)$$

(3) כללי

$$R_N = f(x)/g(x) - \sum_{j=0}^{N} a_j(x)$$

ונדרוש

$$\frac{R_N(x)}{a_N(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

לדוג'

$$a_j(x) = \frac{a_j}{x^j}$$

פולינומי צ'בישב: $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)=\cos(n\arccos x)$

$T_0(x)=1$

$T_1(x)=x$

$T_2(x)=2x^2-1$

$T_3(x)=4x^3-2x^2-2x+1$

$T_4(x)=8x^4-4x^3-6x^2+2x+1$

$T_5(x)=16x^5-8x^4-16x^3+6x^2+4x-1$

$T_6(x)=32x^6-16x^5-40x^4+16x^3+14x^2-4x-1$

$T_7(x)=64x^7-32x^6-72x^5+40x^4+22x^3-12x^2-6x+1$

$T_0(x)=1$ 0 אפסים

$T_1(x)=x$ 1 אפסים חסומים ע"י

$T_2(x)=2x^2-1$ 2 אפסים

± 1

$T_3(x)=4x^3-3x$

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$

$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$

$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$

$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$