

Dror Bar-Natan: Classes: [2001-02](#):

Knots and Feynman Diagrams

Instructor: [Dror Bar-Natan](#), drorbn@math.huji.ac.il, 02-658-4187.

Classes: Mondays 14:00-15:00 at Mathematics 110 and Thursdays 10:00-12:00 at Sprintzak 102.

Office hours: Mondays 15:00-15:45 in my office, Mathematics 309.

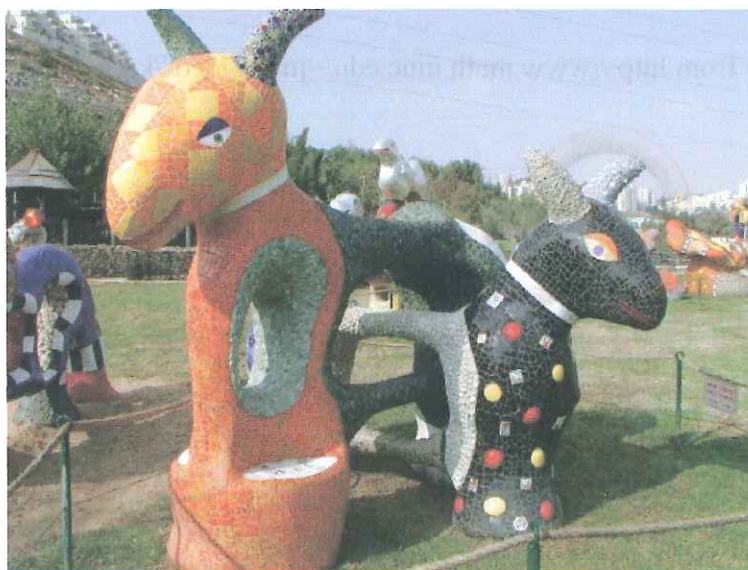
Agenda: To understand how path integrals and Feynman diagrams can lead to a very wide class of knot invariants.

Syllabus: Knots and links, all about linking numbers, all about self linking, framing and torsion, Gaussian integration, Abelian Chern-Simons theory, non-Abelian Chern-Simons theory, Faddeev-Popov and ghosts, BRST and supersymmetry, configuration space integrals, compactification of configuration spaces, the framing anomaly, finite type invariants and universality, directions of current research. I'm not committed to anything, don't sue me.

Prerequisites: Stokes' theorem for differential forms on manifolds with boundary.

Reading material:

- My [Perturbative Chern-Simons theory](#), *Journal of Knot Theory and its Ramifications* **4-4** (1995) 503-548 and my [Ph.D. thesis](#).
- Scott Axelrod and Isadore Singer's *Chern-Simons perturbation theory*, Proc. XXth DGM Conference (New York, 1991) (S. Catto and A. Rocha, eds) World Scientific (1992) 3-45 and *Chern-Simons perturbation theory II*, *Jour. Diff. Geom.* **39** (1994) 173-213.
- Dylan Thurston's *Integral expressions for the Vassiliev knot invariants*, [arXiv:math.QA/9901110](#).
- Daniel Altschuler and Laurent Freidel's *Vassiliev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders*, *Comm. Math. Phys.* **187** (1997) 261-287, [arXiv:q-alg/9603010](#).
- Sylvain Poirier's *The limit configuration space integral for tangles and the Kontsevich integral*, [arXiv:math.GT/9902058](#) and [Ph.D. thesis](#), [arXiv:math.GT/0005085](#).



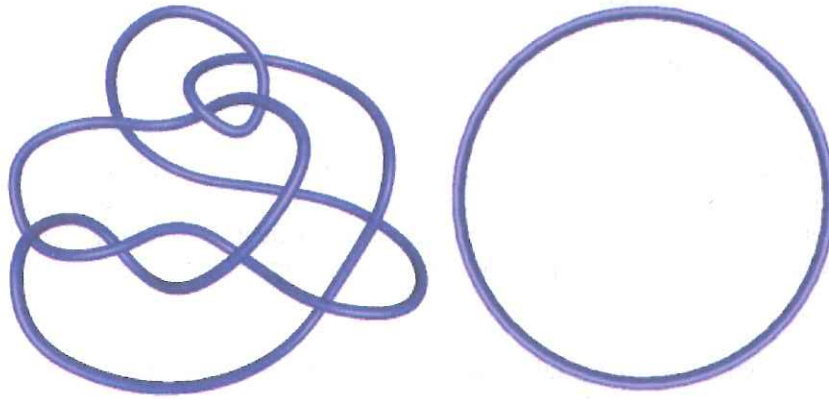
At the [Jerusalem Zoo](#). Are they forever linked?

Dror Bar-Natan: [Classes](#): [2001-02](#): [Knots and Feynman Diagrams](#):

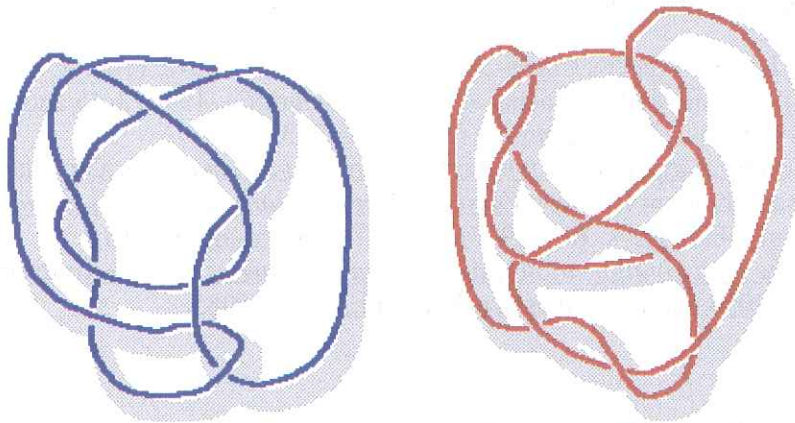
Some Non Obvious Examples

Are these pairs the same?

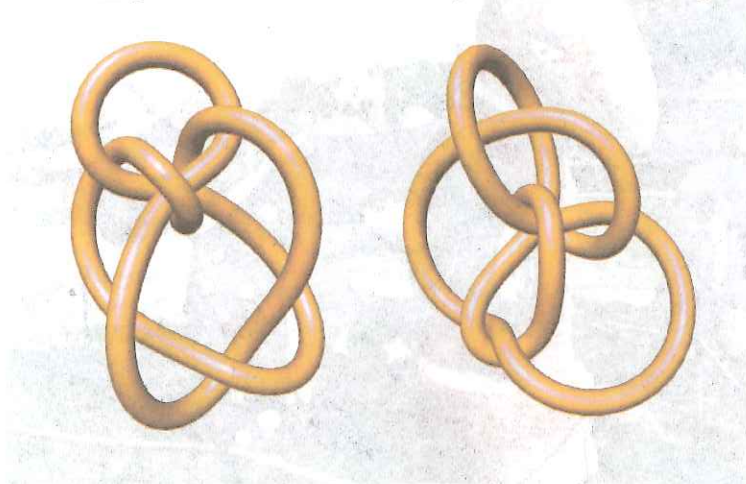
The Millett Example: (rendered using [Rob Scharein's KnotPlot](#))



The Perko Pair (1): (taken from <http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/perko.html>)



The Perko Pair (2): (taken from <http://www.math.uiuc.edu/~jms/Videos/ke/images.html>)



2001 תמוז 22, שבת, 1000

פרק 0
 תרגילים
 פתרון

$$\int_{\mathbb{R}^3} \text{DAE} \left(\frac{1}{4\pi} (A_1 dA + \frac{2}{3} A_1 A_1 A_1) \right) \cdot \text{Thol}_{\mathbb{R}^3}(A)$$

1. מהו הפתרון של המשוואה $\Delta u = 0$ בתוך כדור $B_1(0)$ עם תנאי גבול $u|_{\partial B_1} = 0$?

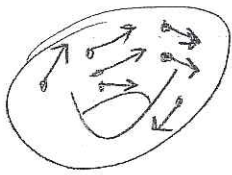
2. חשבו את האינטגרל $\int_{\mathbb{R}^3} \text{div} \left(\frac{x}{|x|^3} \right) dx$ על תיבת $[-1, 1]^3$.

3. חשבו את האינטגרל $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^3} dx$ על תיבת $[-1, 1]^3$.

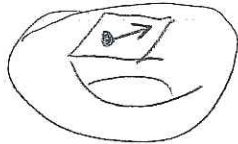
4. חשבו את האינטגרל $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^4} dx$ על תיבת $[-1, 1]^3$.

5. חשבו את האינטגרל $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^5} dx$ על תיבת $[-1, 1]^3$.

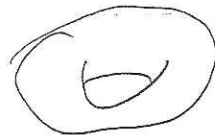
כל מה שמתקן רציף נחשב אל גבולות קטנים
 וזו הדרך הטובה



צורה
 מקומית
 X



וקטור
 משיק



יציאה

כל וקטור בצורה

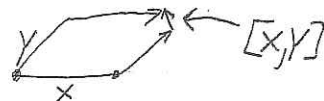
מקומית הפניה זה ייתרון וקטור אל מהו:

$$X = \sum F_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(X, F) \mapsto XF = \sum F_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

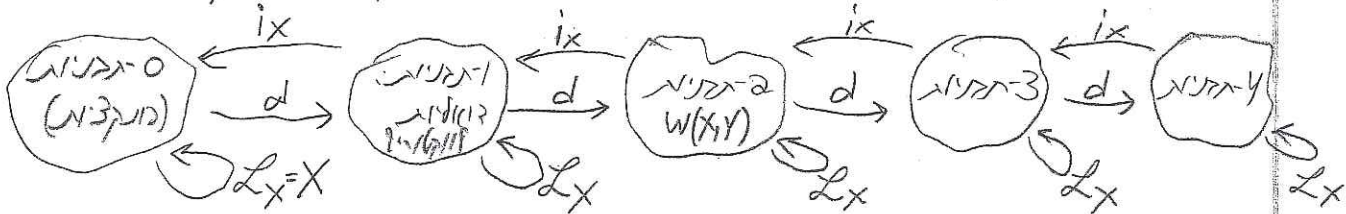
הקומוטטור: $[X, Y] = XY - YX$. הנוסחה של Lie. איטור, אנטי-סימטרי, ומקיים יעקובי:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$



צורה וקטוריים מקבילים צריחה, ולכן נוצרים הפה. הסמל: L_X
 $L_X Y = [X, Y]$; $L_X f = Xf$

K-גבול: פונקציות ממשל-ליניארי אל-סימטרי אל K וקטוריים בקבוצה זאת:



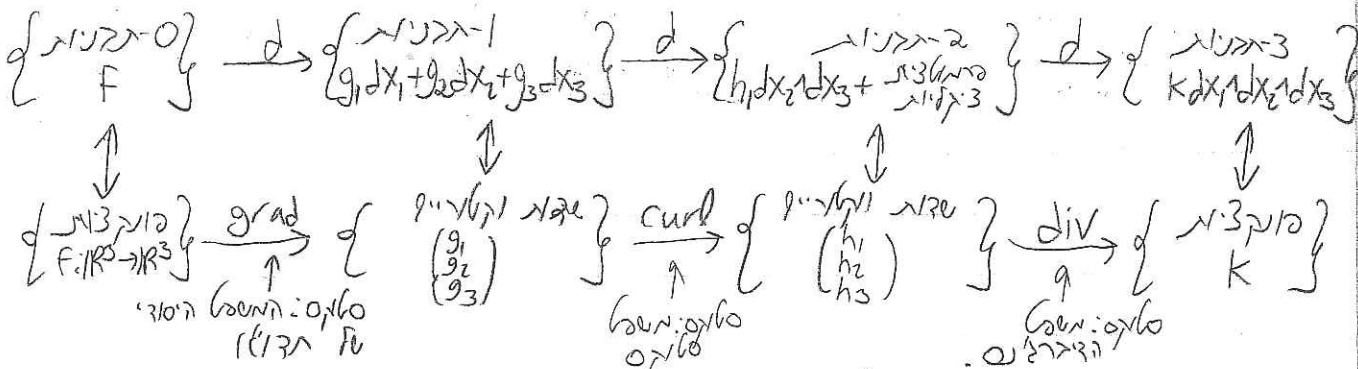
המכנה הפניה: $(i_X W)(Y_1, \dots, Y_{n-1}) = W(X, Y_1, \dots, Y_{n-1})$
 המכנה היה צריך: $(W \wedge \eta)(Y_1, \dots, Y_{m+n}) = \sum_{\sigma \in S_{m+n}} W(Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(m)}) \eta(Y_{\sigma(m+1)}, \dots, Y_{\sigma(m+n)})$

הצורה היה צריך: $dW = \sum dx_i \wedge \frac{\partial W}{\partial x_i}$; $d^2 = 0$

כל היעדר ה וקטוריים הוא נעדר, היעדר ה גבולות הוא מובטח:

$\int_D dW = \int_{\partial D} W$ $\int_D W = \sum$

הקומוטטור: $[X, Y]$



והצורה של - קומוטטור

כמה דברים חשובים:

מרחב-זמן

$$\psi: X \rightarrow Y$$

נקודות; כוונת; מרחב-זמן
מרחב-זמן (מרחב)

$$\psi: X \rightarrow Y$$

~~מרחב-זמן~~
~~מרחב-זמן~~
~~מרחב-זמן~~
מרחב-זמן

יחידה / יחידה זו טבע

וקצו שני

שני כוונת וסמן עקרים

מרחב-זמן

df

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

$$d^2=0$$

מרחב-זמן (מרחב-זמן)

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

מרחב-זמן

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$v^T(dx_1, \dots, dx_n) =$$

2001 תרגיל 1, 2001 תרגיל 1

הצגת $S^{-1} \subset \mathbb{R}^n$ ו- S (א) הצגת

$x_1 dx_2 - dx_3 - \dots - dx_n$ + rotations with signs

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (dx_1 - \dots - dx_n)$$

→ $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (dx_1 - \dots - dx_n)$ הצגת S^{-1} $\rightarrow S$ $\leftarrow \mathbb{R}^n$

$\Phi: S \times S \rightarrow S \leftarrow \mathbb{R}^n$ הצגת

$$dW = \sum dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} W = \dots$$

1. \mathbb{R}^3

2. \mathbb{R}^2 הצגת

3. \mathbb{R}^3 הצגת \mathbb{R}^2 הצגת

4. \mathbb{R}^2 הצגת

5. \mathbb{R}^2 הצגת \mathbb{R}^3 הצגת

6. \mathbb{R}^2 הצגת \mathbb{R}^3 הצגת

תרגיל 3, 2001

1. מהי ההסתברות שיש יותר מ-100 זכרים?

2. מהי ההסתברות שיש יותר מ-100 נקבות?
האם יש הבד?

פ

3. מהי ההסתברות שיש יותר מ-100 זכרים ו-100 נקבות?

4. מהי ההסתברות שיש יותר מ-100 זכרים או יותר מ-100 נקבות?

5. מהי ההסתברות שיש יותר מ-100 זכרים או יותר מ-100 נקבות או יותר מ-100 זכרים ו-100 נקבות?

6. מהי ההסתברות שיש יותר מ-100 זכרים ו-100 נקבות או יותר מ-100 זכרים או יותר מ-100 נקבות או יותר מ-100 זכרים ו-100 נקבות?

2. $T^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\psi} \mathbb{S}^2$

$$d \frac{x_i}{|x|} = \frac{dx_i}{|x|} - \frac{\sum dx_j}{|x|^{3/2}}$$

$$\pi^* \omega = \frac{x_1}{|x|} d \frac{x_2}{|x|} \wedge d \frac{x_3}{|x|} + \text{cyc.} = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3}{|x|^3} - \frac{x_1 x_2 (dx_2 \wedge (dx_1 + dx_3))}{|x|^{7/2}} + \text{cyc.}$$

$$= \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3}{|x|^3}$$

קשרים אקוויבנטים ביניהם 6 לפרק 2002

1. נוסח קשרים

2. הוכחה אקוויבנטית, הוכחה אחרת - איננה או הוכחה אחרת אקוויבנטית

3. קוואזי-קוויבנטים וקשרים \mathbb{Z}^2

4. אי-הדלוקה בקבוצה חבטה - הוכחה אחרת או הוכחה אחרת אקוויבנטית

5. מספר הקשרים חבטה

קריטריון איזומורפיזם בין B ו- B 1001

$$\Phi: \overline{C_2}(S') \rightarrow (S^2, \omega), \overline{C_2}(S_0), C_2(S')$$

קריטריון איזומורפיזם בין B ו- B 27 1001

1. זמן גורם.

2. איזומורפיזם

$$C_n(M, S') : C_n(M)$$

3. קריטריון איזומורפיזם

$$\pi_*: \mathcal{L}^k(X) \rightarrow \mathcal{L}^{k-n}(B); M^n \rightarrow X \xrightarrow{\pi} B \quad 4$$

$$d\pi_* \omega = \pi_* d\omega - (2\pi)_* \omega \quad 5$$

2001 7233d 31 $\sqrt{\mu \cdot \sigma}$ $\sqrt{\mu \cdot \sigma}$ 9707

$$\langle A_i(x) | A_j(y) \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} A_i(x) A_j(y) e^{\frac{i\mathbf{k}}{4\pi} \int A^2 dx} =$$

$$\int A_i(x) A_j(y) e^{\frac{i\mathbf{k}}{4\pi} \int A^2 dx + 2\phi \mathcal{D}^* A} \mathcal{D} A \mathcal{D} \phi$$

$$\int A^2 dx + 2\phi \mathcal{D}^* A = \left\langle \begin{pmatrix} A \\ \phi \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} A \\ \phi \end{pmatrix} \right\rangle \quad L = \mathcal{D}^* + \mathcal{D}$$

$$L \otimes \mathbb{1} = \mathcal{D}^* \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathcal{D} = \Delta$$

$$L^{-1} = L \circ \Delta^{-1} = L \circ \left(\frac{1}{4\pi \sqrt{|\mathbf{k}|}} * \right)$$

שאלה 10.1 $L \rightarrow M$; $M \rightarrow D$

תהי $\pi: M \rightarrow B$ פרויקציה 3-ממדית 2002

2. $\pi^* \omega = \omega \circ \pi$ עבור $\omega \in \Omega^k(B)$

1.3.2

$\pi_*: \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k-n}(B)$; $M^n \rightarrow X \xrightarrow{\pi} B$ 3

$\pi_* \pi^* \omega = \omega$; $\pi_* \pi^* \omega = \omega$ 4

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$ 5

$\partial C_{\pi}(M^n) = \underbrace{\cup_{\mathbb{R}^n} C_{\pi}(M^n)}_{\text{צורה סגורה}} \cup \underbrace{\cup_{\mathbb{R}^{n-1}} C_{\pi}(M^n)}_{\text{צורה סגורה}}$

$\mathbb{D}_n^m = \left\{ \begin{matrix} m = 2|A| - 3 = 2|B| - 3|V| \\ n = \chi(M) = |E| - |V| \end{matrix} \right\} / \sim$ 5

$I: \mathbb{D}_n^m \rightarrow \Omega^m(\Gamma)$

$I(0) = \pi_* \Phi_0^*(\omega^{|E|})$ 6

$\mathcal{H}(\pi_* \Phi_0^*(\omega))$: $\mathcal{H}(\pi_* \Phi_0^*(\omega))$ 7

$\mathbb{D}_n^m \xrightarrow{d} \mathbb{D}_n^{m+1}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $\Omega^m \xrightarrow{d} \Omega^{m+1}$

דיון

THE FULTON-MACPHERSON COMPACTIFICATION

DROR BAR-NATAN

Let M be a manifold and let A be a finite set.

Definition 1. The open configuration space of A in M is

$$C_A^\circ(M) := \{\text{injections } \iota : A \rightarrow M\}.$$

Definition 2. The compactified configuration space of A in M is

$$C_A(M) := \coprod_{\substack{\{A_1, \dots, A_k\} \\ A = \cup A_\alpha}} \left\{ \left(p_\alpha \in M, c_\alpha \in \tilde{C}_{A_\alpha}(T_{p_\alpha} M) \right)_{\alpha=1}^k : p_\alpha \neq p_\beta \text{ for } \alpha \neq \beta \right\}$$

where if V is a vector space and $|A| \geq 2$,

$$\tilde{C}_A(V) := \coprod_{\substack{\{A_1, \dots, A_k\} \\ A = \cup A_\alpha; k \geq 2}} \left\{ \left(v_\alpha \in V, c_\alpha \in \tilde{C}_{A_\alpha}(T_{v_\alpha} V) \right)_{\alpha=1}^k : v_\alpha \neq v_\beta \text{ for } \alpha \neq \beta \right\} / \text{translations and dilations.}$$

while if A is a singleton, $\tilde{C}_A(V) := \{\text{a point}\}$.

Theorem 1. (1) $C_A(M)$ is a manifold with corners, and if M is compact, so is $C_A(M)$.

(2) If A is a singleton, $C_A(M) = M$. If A is a doubleton, then $C_A(M)$ is isomorphic to $M \times M$ minus a tubular neighborhood of the diagonal $\Delta \subset M \times M$. That is, $C_A(M) = M \times M - V(\Delta)$.

(3) If $B \subset A$ then there is a natural map $C_B(M) \rightarrow C_A(M)$. In particular, for every $i, j \in A$ there is a map $\phi_{ij} : C_A(\mathbb{R}^3) \rightarrow C_{\{i,j\}}(\mathbb{R}^3) \sim S^2$.

(4) If $f : M \rightarrow N$ is smooth, then there's a natural $f_* : C_A(M) \rightarrow C_A(N)$. □

Now let D be a graph whose set of vertices is A . If two different vertices $a_{0,1} \in A$ are connected by an edge in D , we write $a_0 \overset{D}{-} a_1$. Likewise, if $A_{0,1} \subset A$ are disjoint subsets, we write $A_0 \overset{D}{-} A_1$ if $a_0 \overset{D}{-} a_1$ for some $a_0 \in A_0$ and $a_1 \in A_1$. For any subset A_0 of A we let $D(A_0)$ be the restriction of D to A_0 .

Definition 3. The open configuration space of D in M is

$$C_D^\circ(M) := \{\iota : A \rightarrow M : \iota(a_0) \neq \iota(a_1) \text{ whenever } a_0 \overset{D}{-} a_1\}.$$

Definition 4. The compactified configuration space of D in M is

$$C_D(M) := \coprod_{\substack{\{A_1, \dots, A_k\} \\ A = \cup A_\alpha \\ \forall \alpha D(A_\alpha) \text{ connected}}} \left\{ \left(p_\alpha \in M, c_\alpha \in \tilde{C}_{D(A_\alpha)}(T_{p_\alpha} M) \right)_{\alpha=1}^k : p_\alpha \neq p_\beta \text{ whenever } A_\alpha \overset{D}{-} A_\beta \right\}$$

where if V is a vector space and $|A| \geq 2$,

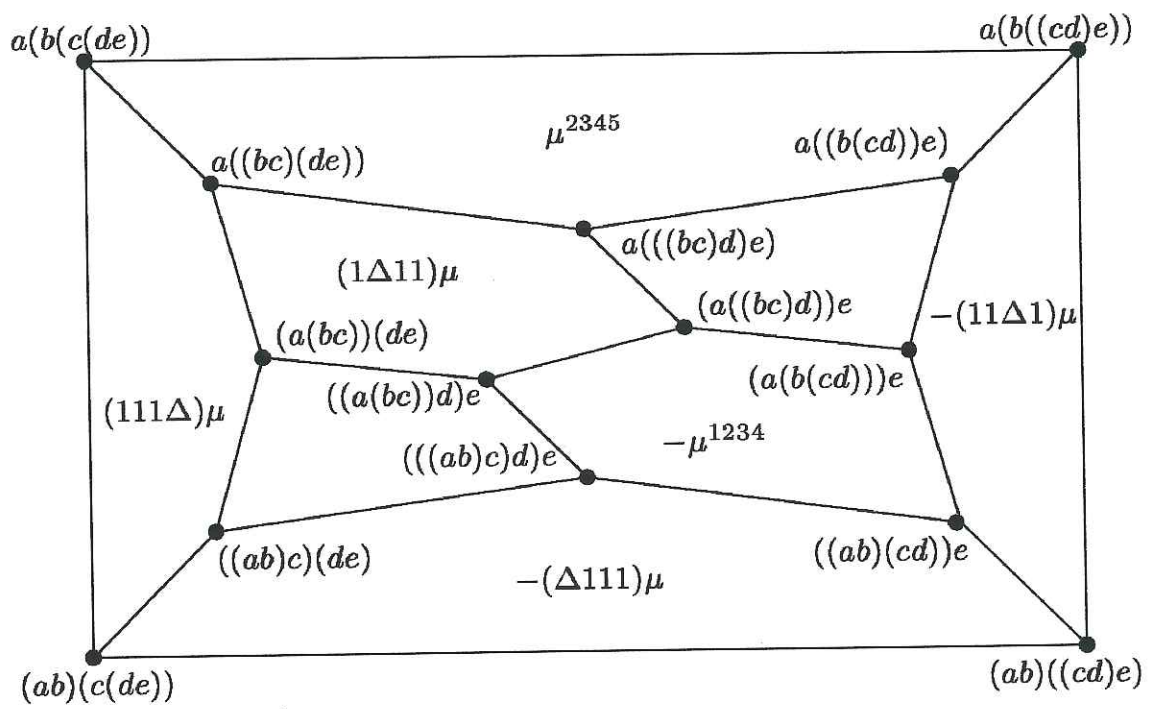
$$\tilde{C}_D(V) := \coprod_{\substack{\{A_1, \dots, A_k\} \\ A = \cup A_\alpha; k \geq 2 \\ \forall \alpha D(A_\alpha) \text{ connected}}} \left\{ \left(v_\alpha \in V, c_\alpha \in \tilde{C}_{D(A_\alpha)}(T_{v_\alpha} V) \right)_{\alpha=1}^k : v_\alpha \neq v_\beta \text{ whenever } A_\alpha \overset{D}{-} A_\beta \right\} / \text{translations and dilations.}$$

while if A is a singleton, $\tilde{C}_D(V) := \{\text{a point}\}$.

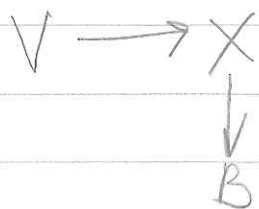
Theorem 2. The obvious parallel of the previous theorem holds. □

Date: January 3, 2002.

This handout is available from <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn/classes/0102/FeynmanDiagrams/>.



הגדיר וקראתם מרחב וקטור V ופונקציה $f: V \rightarrow V$



\ast הפונקציה f היא ליניארית
 \ast הפונקציה f היא קומוטטיבית
 \ast הפונקציה f היא אסימטרית

האם יש פונקציה $f: V \rightarrow V$ שהיא ליניארית, קומוטטיבית, אסימטרית?

נניח שיש פונקציה כזו. אז $f(f(v)) = f(v)$ לכל $v \in V$.
 נבחר $v \neq 0$. אז $f(v) = v$.
 אבל אז $f(v) = f(f(v)) = f(v) = v$.
 זה לא אסימטרי.

$$f: V \rightarrow V$$

$$Df = \text{matrix}$$

$$D(fv) = (Df)v + fDv$$

$$v \mapsto Dv \in \mathcal{L}(V) \quad (Dv)(v) =$$

$$v \mapsto Dv \in \mathcal{L}(V) : D(fv) = Df \cdot v + f \cdot Dv$$

האם יש פונקציה $f: V \rightarrow V$ שהיא ליניארית, קומוטטיבית, אסימטרית?

$$D_1 - D_2 \in \mathcal{L}(V)$$

$$D = D + A$$

האם יש פונקציה $f: V \rightarrow V$ שהיא ליניארית, קומוטטיבית, אסימטרית?

$$D \mapsto D^g = g^{-1} D g \quad ; \quad g: M \rightarrow \text{End}(V)$$

$$A \mapsto g^{-1} D g + g^{-1} A g$$

האם יש פונקציה $f: V \rightarrow V$ שהיא ליניארית, קומוטטיבית, אסימטרית?

Knots and Feynman Diagrams, Jan 7 2002:

Emergence of FEYNMAN DIAGRAMS

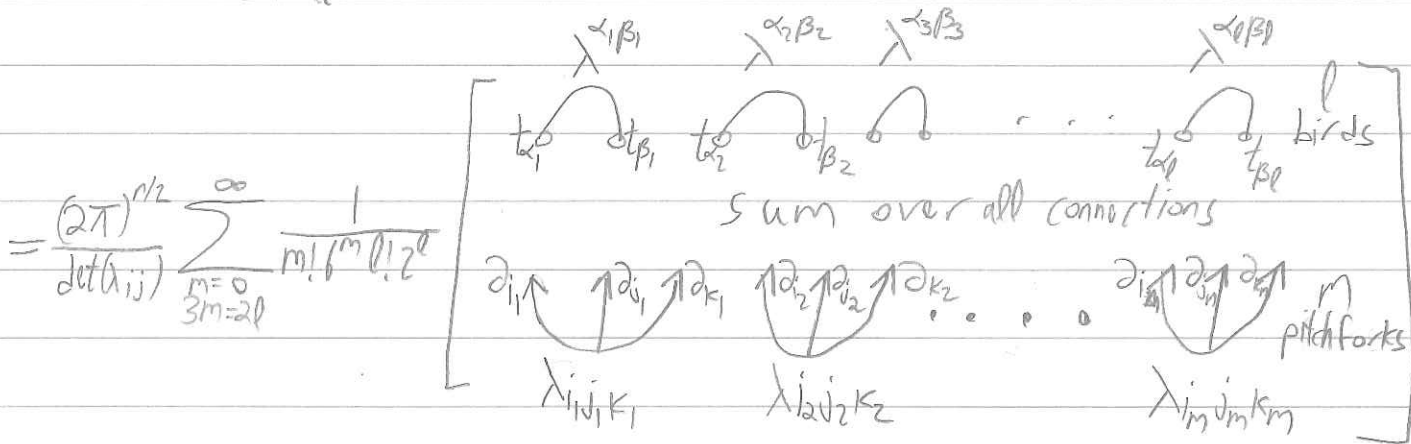
Recall: we wish to understand $\int_{\text{conn.}} \mathcal{D}A e^{\frac{i\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{2} A \Delta A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)}$ $hol_\gamma(A)$

(whatever that may mean). As a warmup:

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-\frac{1}{2} \lambda_{ij} x^i x^j + \frac{i}{6} \lambda_{ijk} x^i x^j x^k} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(\lambda_{ij})} e^{\frac{i}{6} \lambda_{ijk} \partial_i \partial_j \partial_k} e^{\frac{1}{2} \lambda^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta} \Big|_{t_\alpha=0}$$

$\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$

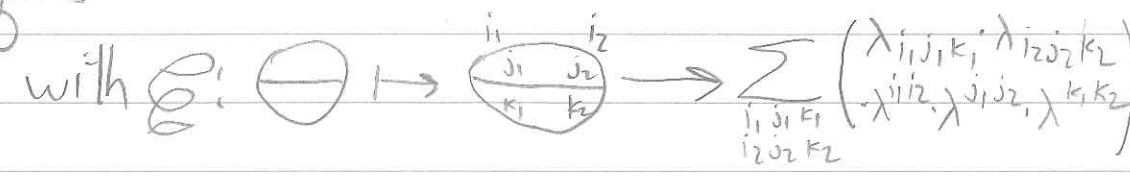
$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(\lambda_{ij})} \sum_{\substack{m=0 \\ 3m=2l}}^{\infty} \frac{1}{m! 6^m l! 2^l} (\lambda_{ijk} \partial_i \partial_j \partial_k)^m (\lambda^{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta)^l$$



$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(\lambda_{ij})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! 6^m l! 2^l} \sum_{\substack{m\text{-vertex Fully marked} \\ \text{Feynman Diagrams } \mathcal{D}}} \mathcal{E}(\mathcal{D}) \quad \mathcal{D} = \bigcirc, \bigcirc-\bigcirc, \dots$$

but fully marked

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(\lambda_{ij})} \sum_{\substack{\text{unmarked} \\ \text{Feynman} \\ \text{Diagrams} \\ \mathcal{D}}} \frac{1}{\text{Aut}(\mathcal{D})} \mathcal{E}(\mathcal{D})$$

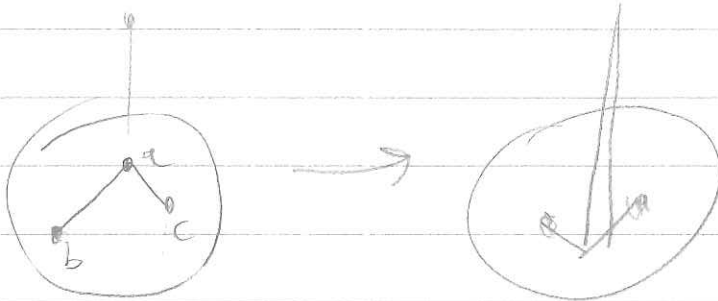


Dror Bar-Natan

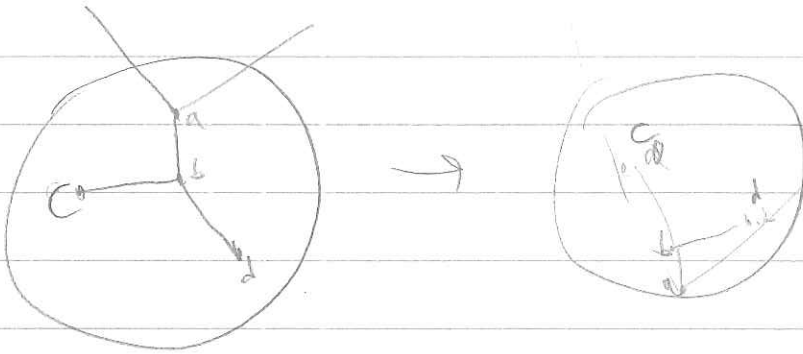
Handout 10: Introduction to the proof

hand out 1.

introduction 2

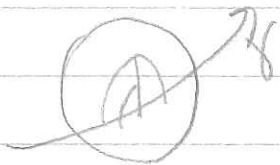


$$a \rightarrow b+c-a$$



$$\begin{aligned} b &\rightarrow c+d-b \\ a &\rightarrow c+d-a \end{aligned}$$

introduction 2



Knots and Feynman Diagrams, Jan 10 2002:

de-Rham theory on Γ and graph cohomology

Reminders:

1. $\partial C_D(\mathbb{R}^n) = \underbrace{\bigcup_{\text{edges } e \in D} S^{n-1} \times C_{D/e}(\mathbb{R}^n)}_{\text{Principal faces}} \cup \underbrace{\bigcup \text{ mess}}_{\substack{\text{bigger} \\ \text{subdiagrams}}} \cup \underbrace{\bigcup \text{ mess}}_{\substack{\text{hidden faces} \\ \text{(wishful thinking)}}}$

↑
Fulton-Macpherson compactification

2. Fiber bundles:

$$\begin{array}{ccc}
 M^n & \longrightarrow & X \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & B
 \end{array}
 \quad
 \pi_*: \Omega^*(X) \longrightarrow \Omega^{*-n}(B)$$

(integration along fibers)

$$d\pi_* W = \pi_* dW - (\partial\pi)_* W$$

3. Our diagrams: $D_n^m = \left[\pm \left(\text{graph with } m \text{ internal edges} \right) \right] / \text{signs}$

$m = \sum m_i - 3 = 2|E| - 3|V|$
 $n = -\chi = |E| - |V|$

directed internal edges
ordered \pm vertices

Our space: $\Gamma: \{ \text{all embeddings } \gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \}$

our map: $I: D_n^m \rightarrow \Omega^m(\Gamma)$ by $I(D) = \pi_* \Phi_D^* W^{|E|}$

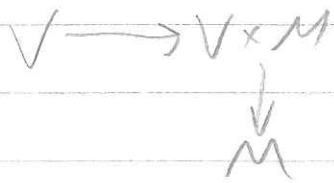
wishful thinking: $(\partial\pi)_* \Phi_D^* W^{|E|}$ vanishes on hidden faces

Conclusion:

$$\begin{array}{ccccc}
 \longrightarrow & D_n^m & \xrightarrow{d} & D_n^{m+1} & \longrightarrow \dots \\
 & \downarrow I & & \downarrow I & \\
 \longrightarrow & \Omega^m(\Gamma) & \xrightarrow{d} & \Omega^{m+1}(\Gamma) & \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Dror Bar-Natan

קשרים וריאנטים ע"י מילר 14, 2002



$A \in \Omega^1(M, \text{End } V)$: קשר/קשר

שי, יפה $S: M \rightarrow V$ יע
 $D_A \psi = d\psi + A\psi$; $(D_A S)(\xi) = \xi S + A(\xi)(S)$

$g \circ D \mapsto D^g = g^{-1} D g$; $g: M \rightarrow \text{Aut}(V)$: פונקציה

$A \mapsto g^{-1} d g + g^{-1} A g$

$v_0 \in V$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$: קשר/קשר

$\psi: [0, 1] \rightarrow V$: קשר

$(\psi^*(D_A))(\dot{\gamma}) = 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \psi + A(\dot{\gamma}(t)) \psi \right) = 0$

קשר; $\tilde{\psi}(t) = e^{-\int_0^t A(\dot{\gamma}(s))} v_0$ - קשר A יע

$\tilde{\psi}(t) = \left(I - \int_0^t A(\dot{\gamma}(s)) + \dots \right) v_0$
 $\text{hol}_\gamma(A)(t)$

$\frac{d}{dt} \text{hol}_\gamma(A)(t) = \text{hol}_\gamma(A)(t) A(\dot{\gamma}(t)) - A(\dot{\gamma}(t)) \text{hol}_\gamma(A)(t)$

קשר $\text{hol}_\gamma(A^g) = g^{-1} \text{hol}_\gamma(A) g(\dot{\gamma}(0))$ קשר

קשר $\text{tr}(\text{hol}_\gamma(A))$

קשר יע

קשר chern-simons

$CS(A) = \int_M \text{tr}(A \wedge dA) + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$

קשר CS(A) קשר

The week to come (Faddeev-Popov Gauge Fixing etc.)
 Knots & Feynman Diagrams, Jan 28
 2002

Our invariant "≡" $\int_{\text{connections}} \mathcal{D}A e^{\frac{i\hbar}{\Lambda} CS(A)} \prod \text{tr}_{R_i} \text{hol}_{R_i}(A) = \#$

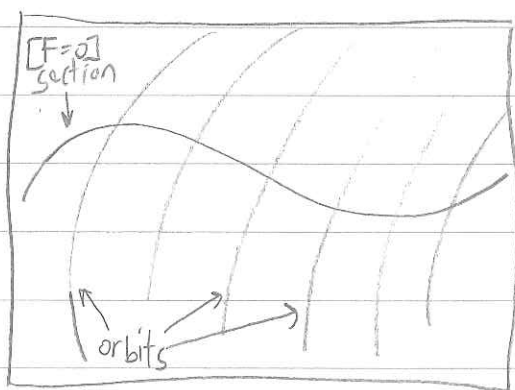
where

$CS(A) = \int_{\mathbb{R}^3} \text{tr} (A^1 dA + \frac{2}{3} A^1 A^1 A)$ invariant under:

$G = \{g: \mathbb{R}^3 \rightarrow GL_n\} \quad A^g = g^{-1} dg + g^{-1} A g$

$\mathcal{G} = \{g: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_n\} \quad A^g = A + dg + [A, g]$

Faddeev-Popov in general:



$\int L dx =$ (for invariant L)

$\int L \delta(F(x)) \det \left(\frac{\partial F^a}{\partial y_b} \right) dx =$

$= \int L e^{i\gamma F(x)} e^{\bar{c}^a \frac{\partial F^a}{\partial y_b} c_b} dx dy d\bar{c} dc$

And in our case:

$\# = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{\frac{i\hbar}{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \text{tr} (A^1 dA + \frac{2}{3} A^1 A^1 A + \phi D_i A^i + \bar{c} D_i (D^i + [A, \cdot]) c)} \cdot \prod \text{tr}_{R_i} \text{hol}_{R_i}(A)$

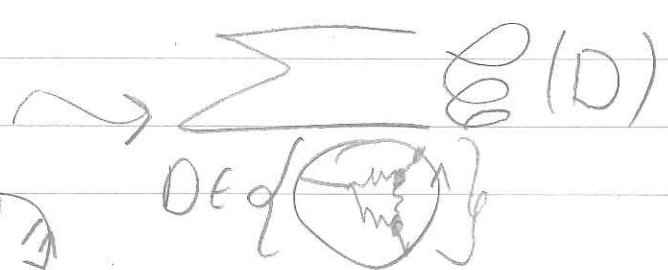
$A^1 dA, \phi D_i A^i \rightarrow$

$\bar{c} D_i D^i c \rightarrow$

$A^1 A^1 A \rightarrow$

$\bar{c} D_i [A^i, c] \rightarrow$

$\text{tr hol}_R(A) \rightarrow$



Determinants & anti-commuting Variables.

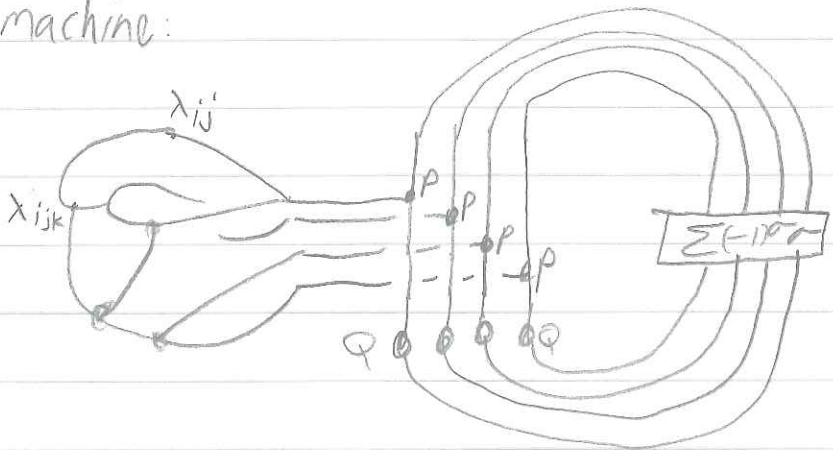
Knots & Feynman Diagrams, Jan 31 2002

Goal: Compute $I := \int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-\frac{1}{2} \lambda_{ij} x^i x^j + \frac{\epsilon}{6} \lambda_{ijk} x^i x^j x^k} \det(Q + \epsilon P_i x^i)$

$Q = Q^a_b \quad P_i = P^a_{i,b}$

Math way: $\det(Q + \epsilon P) = \det(Q) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m \text{tr} \Lambda^m Q^{-1} \Lambda^m P$

Diagrammatic machine:



Berezin's way: Introduce "ghosts" \bar{c}^a and c^b and then

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^a} d\bar{c} \int_{\mathbb{R}^b} dc \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda_{ij} x^i x^j + \frac{\epsilon}{6} \lambda_{ijk} x^i x^j x^k + \bar{c}^a (Q^a_b + \epsilon x^i P^a_{i,b}) c^b\right)$$

Now use ordinary (?) perturbation theory ...

In either case we get

