# Le centre de l'algèbre enveloppante et la formule de Campbell-Haussdorff

Michèle Vergne

Août 1999

Given $\mathfrak{g}$, isn't $I\mathfrak{g}$ always quadratic? And if convol. are understood on $I\mathfrak{g}$, aren't they also understood on $\mathfrak{g}$?

**Abstract.** *Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra. In this note, we define $\mathfrak{g}$-valued functions $F(x,y)$ and $G(x,y)$ on $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, such that $x + y - \log(e^x e^y) = (e^{\mathrm{ad}\, x} - 1)F(x,y) + (1 - e^{-\mathrm{ad}\, y})G(x,y)$. Furthermore, if $\mathfrak{g}$ is a quadratic Lie algebra, we prove an identity for the trace of the matrix $(\mathrm{ad}\, x)\partial_x F + (\mathrm{ad}\, y)\partial_y G$. This identity was conjectured in ([KV]) for any Lie algebra $\mathfrak{g}$, and proved when $\mathfrak{g}$ is a solvable Lie algebra. This result implies (see [KV]) that Duflo's isomorphism ([D]) extends naturally to convolution algebras of invariant distributions on the group $G$ and the Lie algebra $\mathfrak{g}$.*

**Résumé.** *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, nous définissons des fonctions $F(x,y)$ et $G(x,y)$ sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telles que $x + y - \log(e^x e^y) = (e^{\mathrm{ad}\, x} - 1)F(x,y) + (1 - e^{-\mathrm{ad}\, y})G(x,y)$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quadratique, nous prouvons une identité pour la trace de la matrice $(\mathrm{ad}\, x)\partial_x F + (\mathrm{ad}\, y)\partial_y G$. Cette identité est conjecturée dans ([KV]) pour toute algèbre de Lie, et démontrée si $\mathfrak{g}$ est résoluble. Elle implique (voir [KV]) le prolongement naturel de l'isomorphisme de Duflo ([D]) aux algèbres de convolution de distributions invariantes sur le groupe $G$ et sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Soit $L$ l'algèbre de Lie libre en deux générateurs $x, y$ et soit $\hat{L}$ la complétion de $L$. Alors $x + y - \log(e^x e^y)$ est un élément de $\hat{L}$ qui peut s'écrire sous la forme $(e^{\mathrm{ad}\, x} - 1)F(x, y) + (1 - e^{-\mathrm{ad}\, y})G(x, y)$. Les éléments $F$ et $G$ de $\hat{L}$ ne sont pas uniquement déterminés par cette propriété.

On dira qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (réelle et de dimension finie) est une algèbre de Lie quadratique si $\mathfrak{g}$ peut être munie d'une forme quadratique invariante non dégénérée. Les algèbres de Lie réductives sont des algèbres de Lie quadratiques. Voici une autre série d'exemples. Soit $\mathfrak{d}$ une algèbre de Lie et soit $\mathfrak{d}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{d}$ . Alors le produit semi-direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{d} \oplus \mathfrak{d}^*$, où $\mathfrak{d}^*$ est considéré comme un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, est une algèbre quadratique avec forme quadratique $X + f \mapsto \langle f, X\rangle$ $(X \in \mathfrak{d}, f \in \mathfrak{d}^*)$.

Dans cette note, nous démontrons que, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quadratique, la conjecture sur l'existence de $F$ et $G$ satisfaisant à une identité remarquable, énoncée dans [KV], est vraie. Notre outil est l'existence d'une certaine 2-forme équivariante fermée pour l'action diagonale de $G$ sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, construite par L. Jeffrey [J]. Le travail d' Alekseev-Meinrenken ([AM]), en particulier leur démonstration de l'isomorphisme de Duflo étendu aux distributions invariantes, nous a convaincu de l'importance de cette 2-forme dans ce problème.

Nous redémontrons ici les propriétés utilisées de cette 2-forme. Le lemme de Poincaré pour la cohomologie équivariante d'un espace vectoriel conduit naturellement à une écriture particulière pour $\log(e^x e^y) - (x + y)$ sous la forme $[x, U(x, y)] + [y, V(x, y)]$, où $U(x, y)$ et $V(x, y)$ sont déterminés par une équation différentielle. On pose alors

$$F(x, y) = -\frac{\mathrm{ad}\, x}{e^{\mathrm{ad}\, x} - 1} U(x, y), \qquad G(x, y) = -\frac{\mathrm{ad}\, y}{1 - e^{-\mathrm{ad}\, y}} V(x, y).$$

Le calcul de $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)\partial_x F + (\mathrm{ad}\, y)\partial_y G)$ s'avère sans difficulté dans le cas quadratique. Nous espérons évidemment que les éléments $F$ et $G$, construits dans cette note, satisfont la propriété c) du théorème ci-dessous, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, mais dans notre démonstration, nous utiliserons de manière essentielle que, dans une algèbre de Lie quadratique, $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}\, A^{2n} \mathrm{ad}\, U) = 0$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout $A, U \in \mathfrak{g}$ .

Nous renvoyons à ([KV]) pour les corollaires du théorème ci-dessous. Un des corollaires importants a été prouvé pour le cas réductif par [LS].

**Théorème:** *On peut trouver des éléments $F(x,y)$ et $G(x,y)$ dans $\hat{L}$ vérifiant les trois conditions suivantes.*

*a)*

$$x+y-\log(e^x e^y) = (e^{\operatorname{ad} x}-1)F(x,y) + (1-e^{-\operatorname{ad} y})G(x,y).$$

*b) Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie, les éléments $F(x,y)$ et $G(x,y)$ sont des séries convergentes en $(x,y)\in\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$.*

*c) Pour toute algèbre de Lie quadratique $\mathfrak{g}$, alors*

$$\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\operatorname{ad} x)(\partial_x F) + (\operatorname{ad} y)(\partial_y G)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\frac{\operatorname{ad} x}{e^{\operatorname{ad} x}-1} + \frac{\operatorname{ad} y}{e^{\operatorname{ad} y}-1} - \frac{\operatorname{ad} z}{e^{\operatorname{ad} z}-1} - \mathrm{I}\right),$$

*avec $z=\log e^x e^y$.*

**Remarque.** Dans la conjecture initiale, $z$ est remplacé par $\tilde{z}=\log e^y e^x$. Mais, comme $\operatorname{ad}\tilde{z} = e^{\operatorname{ad} y}(\operatorname{ad} z)e^{-\operatorname{ad} y}$, on a $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\frac{\operatorname{ad} z}{e^{\operatorname{ad} z}-1}) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\frac{\operatorname{ad}\tilde{z}}{e^{\operatorname{ad}\tilde{z}}-1})$.

## 1. Définition des fonctions $F$ et $G$.

On considèrera, dans la suite, les fonctions analytiques d'une variable:

$$\Theta(\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}, \qquad R(\lambda) = \frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}-2\lambda}{\lambda^2} = \frac{\Theta(\lambda)+\Theta(-\lambda)-2}{\lambda}.$$

La fonction $R(\lambda)$ est impaire.

L'algèbre de Lie $L=\oplus_n L_n$ est graduée. On note $\mathcal{R}$ la dérivation de l'algèbre $\hat{L}$ telle que $\mathcal{R}|_{L_n} = n\,\mathrm{Id}|_{L_n}$. Si $z=\log(e^x e^y)$, alors

$$\mathcal{R}\cdot z = \Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y.$$

On définit $U\in\hat{L}, V\in\hat{L}$ par les équations différentielles:

$$(\mathcal{R}+1)U(x,y) =$$
$$-\frac{1}{2}\Theta(\operatorname{ad} x)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y) + \frac{1}{2}\Theta(-\operatorname{ad} x)y.$$

$$(\mathcal{R}+1)V(x,y) =$$
$$-\frac{1}{2}\Theta(-\operatorname{ad} y)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y) - \frac{1}{2}\Theta(\operatorname{ad} y)x.$$

**Lemme.** *On a* $U(x,y) = V(-y,-x)$ *et*

$$z - (x+y) = [x, U(x,y)] + [y, V(x,y)].$$

La propriété de symétrie est évidente. Pour la deuxième égalité, on calcule

$\mathcal{R}\cdot([x,U]+[y,V]) = (\operatorname{ad} x)\,(\mathcal{R}+1)U + (\operatorname{ad} y)\,(\mathcal{R}+1)V =$

$$-\frac{1}{2}(1-e^{-\operatorname{ad} x})\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y) + \frac{1}{2}(e^{\operatorname{ad} x}-1)y$$

$$-\frac{1}{2}(e^{\operatorname{ad} y}-1)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y) - \frac{1}{2}(1-e^{-\operatorname{ad} y})x.$$

On remarque que

$$(1-e^{-\operatorname{ad} x})\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1} + (e^{\operatorname{ad} y}-1)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1} = \operatorname{ad} z,$$

$$e^{\operatorname{ad} x}y = e^{\operatorname{ad} z}y, \qquad e^{-\operatorname{ad} y}x = e^{-\operatorname{ad} z}.x$$

Il vient alors,

$\mathcal{R}\cdot([x,U]+[y,V]) =$

$$-\frac{1}{2}((\operatorname{ad} z)R(\operatorname{ad} z)(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y) + \frac{1}{2}(e^{\operatorname{ad} z}-1)y - \frac{1}{2}(1-e^{-\operatorname{ad} z})x,$$

$$= \Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}x + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}y - (x+y) = \mathcal{R}(z-(x+y)),$$

ce qui donne le résultat.

Posons

$$F(x,y) = -\Theta(-\operatorname{ad} x)^{-1}U(x,y), \qquad G(x,y) = -\Theta(\operatorname{ad} y)^{-1}V(x,y).$$

On a donc:

$$x + y - \log(e^x e^y) = (e^{\operatorname{ad} x}-1)F(x,y) + (1-e^{-\operatorname{ad} y})G(x,y).$$

On note $\mathcal{A}(\mathfrak{g}) = \oplus_k \mathcal{A}^k(\mathfrak{g})$ l'algèbre graduée des formes différentielles sur $\mathfrak{g}$. Si $\xi$ est un champ de vecteurs sur $\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{L}(\xi)$ la dérivation de Lie, et $\iota(\xi)$ la contraction. Si $a(x)$ est une fonction sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$, on note $\langle a(x), \partial_x \rangle$ le champ de vecteurs correspondant. Soient $\theta, \theta' \in \mathcal{A}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ les formes différentielles définies par $\theta = \Theta(\operatorname{ad} x)dx$, $\theta' = \Theta(-\operatorname{ad} x)dx$. Ce sont les formes de Maurer-Cartan invariantes à gauche et à droite en coordonnées exponentielles. On a donc

$$d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta], \qquad d\theta' = \frac{1}{2}[\theta', \theta']. \tag{1}$$

Soit $\nu \in \mathcal{A}^k(\mathfrak{g})$ une forme fermée sur $\mathfrak{g}$. Si $\beta \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathfrak{g})$ est telle que $\mathcal{L}(\mathcal{R})\beta = \iota(\mathcal{R})\nu$, la relation de Cartan, $\mathcal{L}(\mathcal{R}) = d\iota(\mathcal{R}) + \iota(\mathcal{R})d$, implique $d\beta = \nu$.

On note $(x, y)$ l'élément courant de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Si $H(x, y)$ est une fonction sur $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ , vérifiant $H(gx, gy) = g \cdot H(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ et $g$ dans le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$, on a

$$(\operatorname{ad} x)\partial_x H + (\operatorname{ad} y)\partial_y H = -\operatorname{ad} H(x, y). \tag{2}$$

Soient $(p_1, p_2) : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ les projections sur le premier ou deuxième facteur. Notons $z$ l'application de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ définie, au voisinage de $0 \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, par $z(x, y) = \log(e^x e^y)$. On a

$$dz = \Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(-\operatorname{ad} x)dx + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(\operatorname{ad} y)dy \tag{3}$$

et donc

$$z^*\theta = \Theta(\operatorname{ad} z)dz = e^{-\operatorname{ad} y} p_1^*\theta + p_2^*\theta. \tag{4}$$

## 2. Le cas d'une algèbre de Lie quadratique

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quadratique. Choisissons une forme bilinéaire symétrique invariante $\langle , \rangle$ sur $\mathfrak{g}$. L'endomorphisme $(\operatorname{ad} x)^n$ est symétrique si $n$ est pair, antisymétrique si $n$ est impair. La matrice transposée $\Theta(\operatorname{ad} x)^t$ de $\Theta(\operatorname{ad} x)$ est donc $\Theta(-\operatorname{ad} x)$. Une fonction $A(x)$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans les endomorphismes antisymétriques de $\mathfrak{g}$ permet de construire la 2-forme $\langle A(x)dx, dx\rangle$ sur $\mathfrak{g}$. De même, une fonction $K(x)$ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ permet de construire la 1-forme $\langle K(x), dx\rangle$ sur $\mathfrak{g}$. On note $\varpi$ la 2-forme sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\varpi = \langle R(\mathrm{ad}\, x)dx, dx\rangle.$$

La 3-forme $\langle [\theta, \theta], \theta\rangle$ est fermée sur $\mathfrak{g}$. On a $3\mathcal{L}(\mathcal{R})\varpi = \iota(\mathcal{R})\langle [\theta, \theta], \theta\rangle$ comme on le vérifie facilement, et donc

$$d\varpi = \frac{1}{3}\langle [\theta, \theta], \theta\rangle. \tag{5}$$

Considérons les trois applications $p_1, p_2, z$ de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$.

**Proposition 1** *(Jeffrey) La 2-forme définie par*

$$f = \frac{1}{4}(p_1^*\varpi + p_2^*\varpi - z^*\varpi) - \frac{1}{2}\langle p_1^*\theta, p_2^*\theta'\rangle$$

*est une 2-forme fermée sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$.*

En effet, on montre que

$$df = \frac{1}{4}(p_1^*d\varpi + p_2^*d\varpi - z^*d\varpi) - \frac{1}{2}\langle p_1^*d\theta, p_2^*\theta'\rangle + \frac{1}{2}\langle p_1^*\theta, p_2^*d\theta'\rangle = 0$$

en utilisant les relations (**??**),(**??**),(**??**).

On a

$$f =$$

$$\frac{1}{4}\langle R(\mathrm{ad}\, x)dx, dx\rangle + \frac{1}{4}\langle R(\mathrm{ad}\, y)dy, dy\rangle - \frac{1}{4}\langle R(\mathrm{ad}\, z)dz, dz\rangle - \frac{1}{2}\langle \Theta(\mathrm{ad}\, x)dx, \Theta(-\mathrm{ad}\, y)dy\rangle.$$

Soient $U(x, y)$ et $V(x, y)$ comme dans **1**. On considère la 1-forme

$$\beta = \langle U(x, y), dx\rangle + \langle V(x, y), dy\rangle.$$

Comme on le vérifie facilement:

$$\mathcal{L}(\mathcal{R})\beta = \langle (\mathcal{R} + 1)U(x, y), dx\rangle + \langle (\mathcal{R} + 1)V(x, y), dy\rangle = \iota(\mathcal{R})f$$

et donc, comme $f$ est **fermée**, on a $d\beta = f$.

Nous vérifions maintenant la propriété c). L'équation $d\beta = f$ implique la connaissance de la partie antisymétrique des matrices $\partial_x U$ et $\partial_y V$. En utilisant la formule (**??**) pour $dz$, on a:

(6)
$$\frac{1}{2}(\partial_x U - (\partial_x U)^t) = \frac{1}{4}R(\operatorname{ad} x) - \frac{1}{4}\Theta(\operatorname{ad} x)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(-\operatorname{ad} x),$$

(7)
$$\frac{1}{2}(\partial_y V - (\partial_y V)^t) = \frac{1}{4}R(\operatorname{ad} y) - \frac{1}{4}\Theta(-\operatorname{ad} y)\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}R(\operatorname{ad} z)\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}\Theta(\operatorname{ad} y).$$

On calcule

$$-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)\partial_x F + (\operatorname{ad} y)\partial_y G)$$
$$= \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\operatorname{ad} x)\partial_x(\Theta(-\operatorname{ad} x)^{-1}U(x,y))\right) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\operatorname{ad} y)\partial_y(\Theta(\operatorname{ad} y)^{-1}V(x,y))\right).$$

On a $\Theta(\lambda)^{-1} = S(\lambda) + \frac{1}{2}\lambda$ où $S$ est une fonction paire. On écrit

$$-\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)\partial_x F + (\operatorname{ad} y)\partial_y G) = A + B$$

avec

$$A = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)\partial_x(S(\operatorname{ad} x)U(x,y))) + \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} y)\partial_y(S(\operatorname{ad} y)V(x,y))),$$

$$B = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)\partial_x([x, U(x,y)])) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} y)\partial_y([y, V(x,y)])).$$

Nous calculons d'abord $B$ en utilisant (**??**), le fait que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\operatorname{ad} H = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{g}$, que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(uv) = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(vu)$ et que $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1} = \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}$.
On obtient

$$B =$$
$$\frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)\partial_x([x, U(x,y)] + [y, V(x,y)])) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} y)\partial_y([x, U(x,y)] + [y, V(x,y)]))$$
$$= -\frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} x)\partial_x(z - (x+y))) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}((\operatorname{ad} y)\partial_y(z - (x+y)))$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}e^{\operatorname{ad} x} + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}e^{-\operatorname{ad} y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}) - \frac{1}{8}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left(\Theta(-\mathrm{ad}\, z)^{-1}(e^{\mathrm{ad}\, x} + e^{\mathrm{ad}\, y}) + \Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}(e^{-\mathrm{ad}\, y} + e^{-\mathrm{ad}\, x})\right)$$

en sommant avec la transposée.

Nous calculons maintenant $A$. En utilisant le lemme 5.2 de [KV], on a

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)\partial_x(S(\mathrm{ad}\, x)U(x,y)))$$

$$= -\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((S(\mathrm{ad}\, x) - 1)\mathrm{ad}\, U(x,y)) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)\partial_x U(x,y)).$$

On a $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)^{2k}\mathrm{ad}\, U) = 0$ car $\mathfrak{g}$ est quadratique. Comme $S(\mathrm{ad}\, x)$ est somme de puissances paires de $\mathrm{ad}\, x$, on a $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((S(\mathrm{ad}\, x) - 1)\mathrm{ad}\, U(x,y)) = 0$ tandis que $\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)\partial_x U(x,y)) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)(\partial_x U(x,y) - \partial_x U(x,y)^t))$ ne dépend que de la partie antisymétrique de la matrice $\partial_x U$. Les formules (**??**), ( **??**) montrent que

$$A = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)\partial_x U(x,y)) + \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, y)S(\mathrm{ad}\, y)\partial_y V(x,y)) = (A_1 - A_2)$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)R(\mathrm{ad}\, x) + (\mathrm{ad}\, y)S(\mathrm{ad}\, y)R(\mathrm{ad}\, y)),$$

$$A_2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)\Theta(\mathrm{ad}\, x)\Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}R(\mathrm{ad}\, z)\Theta(-\mathrm{ad}\, z)^{-1}\Theta(-\mathrm{ad}\, x)\right)$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\mathrm{ad}\, y)S(\mathrm{ad}\, y)\Theta(-\mathrm{ad}\, y)\Theta(-\mathrm{ad}\, z)^{-1}R(\mathrm{ad}\, z)\Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}\Theta(\mathrm{ad}\, y)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\mathrm{ad}\, x)S(\mathrm{ad}\, x)\Theta(-\mathrm{ad}\, x)\Theta(\mathrm{ad}\, x)\Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}R(\mathrm{ad}\, z)\Theta(-\mathrm{ad}\, z)^{-1}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((\mathrm{ad}\, y)S(\mathrm{ad}\, y)\Theta(-\mathrm{ad}\, y)\Theta(\mathrm{ad}\, y)\Theta(-\mathrm{ad}\, z)^{-1}R(\mathrm{ad}\, z)\Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}\right)$$

On obtient

$$A_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{I} - (\Theta(\mathrm{ad}\, x)^{-1} + \Theta(\mathrm{ad}\, y)^{-1})) + \frac{1}{8}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(e^{\mathrm{ad}\, x} + e^{-\mathrm{ad}\, x} + e^{\mathrm{ad}\, y} + e^{-\mathrm{ad}\, y})$$

et

$$A_2 = \frac{1}{8}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\left((e^{\mathrm{ad}\, x} - e^{-\mathrm{ad}\, x} + e^{\mathrm{ad}\, y} - e^{-\mathrm{ad}\, y})\Theta(\mathrm{ad}\, z)^{-1}R(z)\Theta(-\mathrm{ad}\, z)^{-1}\right).$$

On écrit

$$e^{\operatorname{ad} x} - e^{-\operatorname{ad} x} + e^{\operatorname{ad} y} - e^{-\operatorname{ad} y} = (e^{\operatorname{ad} z} - 1)e^{-\operatorname{ad} y} + e^{-\operatorname{ad} x}(e^{\operatorname{ad} z} - 1)$$

$$= (1 - e^{-\operatorname{ad} z})e^{\operatorname{ad} x} + e^{\operatorname{ad} y}(1 - e^{-\operatorname{ad} z}).$$

On obtient alors

$$A_2 = \frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(e^{\operatorname{ad} x} + e^{-\operatorname{ad} x} + e^{\operatorname{ad} y} + e^{-\operatorname{ad} y})$$

$$-\frac{1}{8}\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}}(\Theta(-\operatorname{ad} z)^{-1}(e^{\operatorname{ad} x} + e^{\operatorname{ad} y}) + \Theta(\operatorname{ad} z)^{-1}(e^{-\operatorname{ad} y} + e^{-\operatorname{ad} x})).$$

En additionnant $A_1 - A_2$ et $B$, on obtient donc le théorème annoncé.

**Bibliographie**

[AM] A. Alekseev, E. Meinrenken, The non-commutative Weil algebra, Inventiones Math. , à paraître.

[Du] M. Duflo, Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup 10 (1977), 267-288

[J] L. Jeffrey, Symplectic forms on moduli spaces of flat connections on 2-manifolds, AMS/IP, Stud. Adv. Math. 2 (1997), 268-281

[KV] M. Kashiwara, M. Vergne, The Campbell-Haussdorff formula and invariant hyperfunctions, Inventiones Math. 47 (1978), 249-272

[LS] T. Levasseur, J.T. Stafford, The kernel of an homomorphism of Harish-Chandra, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup 29 (1996), 385-397.