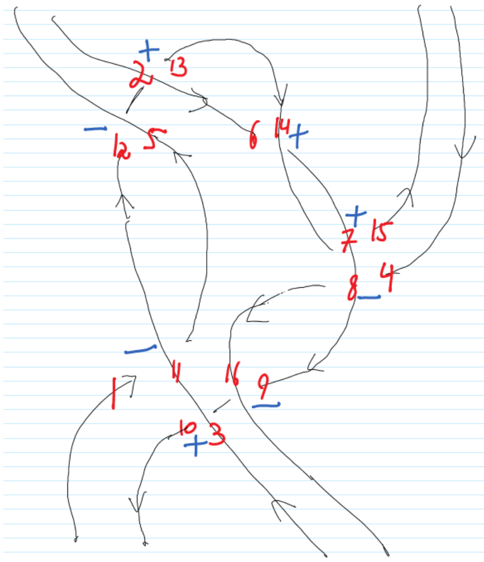
Pensieve Header: A ribbon property example using Γ-calculus.

```
dir = SetDirectory["C:/drorbn/AcademicPensieve/2014-05/"];
<< KnotTheory`
<< MetaCalculi/MetaCalculi-Program.m
ΓSimp = Factor;
```

```
Loading KnotTheory` version of April 3, 2014, 16:23:56.0784.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.
```



```
{γ0 =
   Xm[11, 1] Xm[5, 12] Xp[2, 13] Xp[14, 6] Xp[7, 15] Xm[8, 4] Xm[16, 9] Xp[3, 10] // Γ,
 γ1 = γ0 // dm[1, 5, 1] // dm[2, 6, 2] // dm[2, 7, 2] // dm[2, 8, 2] // dm[2, 9, 2] //
          dm[2, 10, 2] // dm[3, 11, 3] // dm[3, 12, 3] //
       dm[3, 13, 3] // dm[3, 14, 3] // dm[3, 15, 3] // dm[4, 16, 4],
 γ2 = γ1 // dS[2] // dS[4]
}
```

$$\Bigg\{\left(\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 & s_{10} & s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\
s_1 & \frac{1}{T_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-T_2 & 0 & 0 & 0 \\
s_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-T_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+T_5}{T_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-T_7 & 0 \\
s_8 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+T_8}{T_8} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_{11} & \frac{-1+T_{11}}{T_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\
s_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
s_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_7 & 0 \\
s_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+T_{16}}{T_{16}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\Sigma & \frac{1}{T_{11}} & 1 & 1 & \frac{1}{T_8} & 1 & T_{14} & 1 & 1 & \frac{1}{T_{16}} & T_3 & 1 & \frac{1}{T_5} & T_2 & 1 & T_7 & 1
\end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc}
\frac{-1+T_2+T_3-2\,T_2\,T_3+T_2^2\,T_3+T_2\,T_3^2-T_2^2\,T_3^2+T_1\,T_4}{T_1\,T_4} & s_1 & s_2 \\
s_1 & \frac{1-T_2-T_3+2\,T_2\,T_3-T_2^2\,T_3-T_2\,T_3^2+T_2^2\,T_3^2-T_4+T_3\,T_4-T_1\,T_3\,T_4}{T_3\,\left(1-T_2-T_3+2\,T_2\,T_3-T_2^2\,T_3-T_2\,T_3^2+T_2^2\,T_3^2-T_1\,T_4\right)} & -\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_3)\,(1-T_2+T_2\,T_3)}{-1+T_2+T_3-2\,T_2\,T_3+T_2^2\,T_3+T_2\,T_3^2-T_2^2\,T_3^2+} \\
s_2 & \frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)\,(1+T_2\,T_3)}{1-T_2-T_3+2\,T_2\,T_3-T_2^2\,T_3-T_2\,T_3^2+T_2^2\,T_3^2-T_1\,T_4} & \frac{T_1\,T_3\,(1-T_2+T_2\,T_3)}{-1+T_2+T_3-2\,T_2\,T_3+T_2^2\,T_3+T_2\,T_3^2-T_2^2\,T_3^2+T} \\
s_3 & -\frac{T_2\,(-1+T_3)\,(1-T_3+T_2\,T_3)\,T_4}{T_3\,\left(1-T_2-T_3+2\,T_2\,T_3-T_2^2\,T_3-T_2\,T_3^2+T_2^2\,T_3^2-T_1\,T_4\right)} & \frac{T_2\,(-1+T_3)\,(T_2\,T_3+T_1\,T_4)}{1-T_2-T_3+2\,T_2\,T_3-T_2^2\,T_3-T_2\,T_3^2+T_2^2\,T_3^2-T} \\
s_4 & \frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)\,(1+T_2\,T_3)\,(-1+T_4)}{T_3\,\left(1-T_2-T_3+2\,T_2\,T_3-T_2^2\,T_3-T_2\,T_3^2+T_2^2\,T_3^2-T_1\,T_4\right)} & \frac{T_1\,(1-T_2+T_2\,T_3)\,(-1+T_4)}{-1+T_2+T_3-2\,T_2\,T_3+T_2^2\,T_3+T_2\,T_3^2-T_2^2\,T_3^2+T} \\
\Sigma & \frac{1}{T_3} & \frac{T_3^2}{T_4}
\end{array}\right.$$

$$
\left(\left(\begin{array}{cccc}
\frac{-1+T_2+T_3}{T_2 T_3} & s_1 & s_2 & s_3 \\
s_1 & \frac{1-T_3+T_1 T_3}{T_1 T_3} & \frac{(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_1 T_3} & \frac{-1+T_1}{T_1} \\
s_2 & \frac{(-1+T_2)(-1+T_3)(T_2+T_3)}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3)} & \frac{T_1 T_2+T_2 T_4-T_1 T_2 T_4-T_2^2 T_4+T_1 T_2^2 T_4+T_3 T_4-2 T_2 T_3 T_4+T_2^2 T_3 T_4-T_3^2 T_4+T_2 T_3^2 T_4}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{(-1+T_2)(T_2+T_3)}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} \\
s_3 & \frac{-1+T_3}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_3)(T_1-T_1 T_4+T_1 T_2 T_4+T_3 T_4)}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{T_3}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} \\
s_4 & 0 & \frac{-1+T_4}{T_2 T_3 T_4} & 0 \\
\text{"}\Sigma\text{"} & \frac{1}{T_3} & \frac{1}{T_3^2 T_4} & \frac{1}{T_1 T_2^2}
\end{array}\right.\right.
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc}
\frac{-1+T_2+T_3}{T_2 T_3} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
s_1 & \frac{1}{T_3} & 0 & 0 & 0 \\
s_2 & \frac{(-1+T_2)(-1+T_3)(T_2+T_3)}{T_2 T_3 (-1+T_2+T_3)} & \frac{T_2^2 T_3 T_4-(-1+T_3) T_3 T_4+T_2 \left(1-2 T_3 T_4+T_3^2 T_4\right)}{T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{(-1+T_2)(T_2+T_3)}{T_2 (-1+T_2+T_3)} & \frac{-1+T_2}{-1+T_2+T_3} \\
s_3 & \frac{-1+T_3}{T_2 (-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_3)(1+(-1+T_2+T_3) T_4)}{T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{T_3}{T_2 (-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_2)(-1+T_3)}{T_2 (-1+T_2+T_3)} \\
s_4 & 0 & \frac{-1+T_4}{T_2 T_3 T_4} & 0 & \frac{1}{T_2} \\
\Sigma & \frac{1}{T_3} & \frac{1}{T_3^2 T_4} & \frac{1}{T_2^2} & \frac{1}{T_2}
\end{array}\right)
$$

```
Ov = Xp[o1, 1] Xp[o2, 2] Xp[o3, 3] Xp[o4, 4] // Γ // dm[o1, o2, o] // dm[o, o3, o] //
  dm[o, o4, o]
```

$$
\left(\begin{array}{cccccc}
1 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_o \\
s_1 & T_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_2 & 0 & T_o & 0 & 0 & 0 \\
s_3 & 0 & 0 & T_o & 0 & 0 \\
s_4 & 0 & 0 & 0 & T_o & 0 \\
s_o & 1-T_o & 1-T_o & 1-T_o & 1-T_o & 1 \\
\Sigma & T_o & T_o & T_o & T_o & 1
\end{array}\right)
$$

```
{t1 = Ov ** (γ2 * Γ[ϵ[o]]), t2 = (γ2 * Γ[ϵ[o]]) ** Ov, ocond = Simplify[t1 == t2]}
```

$$
\left\{\left(\begin{array}{cccc}
\frac{-1+T_2+T_3}{T_2 T_3} & s_1 & s_2 & s_3 \\
s_1 & \frac{(1-T_3+T_1 T_3) T_o}{T_1 T_3} & \frac{(-1+T_1)(-1+T_3) T_o}{T_1 T_3} & \frac{(-1+T_1}{T_1} \\
s_2 & \frac{(-1+T_2)(-1+T_3)(T_2+T_3) T_o}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3)} & \frac{\left(T_1 T_2+T_2 T_4-T_1 T_2 T_4-T_2^2 T_4+T_1 T_2^2 T_4+T_3 T_4-2 T_2 T_3 T_4+T_2^2 T_3 T_4-T_3^2 T_4+T_2 T_3^2 T_4\right) T_o}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{(-1+T_2)(T_2}{T_1 T_2 (-1+} \\
s_3 & \frac{(-1+T_3) T_o}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_3)(T_1-T_1 T_4+T_1 T_2 T_4+T_3 T_4) T_o}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{T_3 T_o}{T_1 T_2 (-1+} \\
s_4 & 0 & \frac{(-1+T_4) T_o}{T_2 T_3 T_4} & 0 \\
s_o & 1-T_o & 1-T_o & 1-T \\
\Sigma & \frac{T_o}{T_3} & \frac{T_o}{T_3^2 T_4} & \frac{T_o}{T_1 T_2^2}
\end{array}\right.\right.
$$

```
U = Xm[1, u1] Xm[2, u2] Xm[3, u3] Xm[4, u4] // Γ // dm[u1, u2, u] // dm[u, u3, u] //
  dm[u, u4, u]
```

$$
\begin{pmatrix}
1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_u \\
S_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+T_1}{T_1} \\
S_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1+T_2}{T_1 T_2} \\
S_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1+T_3}{T_1 T_2 T_3} \\
S_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1+T_4}{T_1 T_2 T_3 T_4} \\
S_u & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T_1 T_2 T_3 T_4} \\
\Sigma & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{T_1 T_2 T_3 T_4}
\end{pmatrix}
$$

```
{t1 = U ** (γ2 * Γ[ϵ[u]]), t2 = (γ2 * Γ[ϵ[u]]) ** U, ucond = Simplify[t1 == t2]}
```

$$
\left\{
\begin{pmatrix}
\frac{-1+T_2+T_3}{T_2 T_3} & S_1 & S_2 & S_3 \\
S_1 & \frac{1-T_3+T_1 T_3}{T_1 T_3} & \frac{(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_1 T_3} & \frac{-1+T_1}{T_1} \\
S_2 & \frac{(-1+T_2)(-1+T_3)(T_2+T_3)}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3)} & \frac{T_1 T_2+T_2 T_4-T_1 T_2 T_4-T_2^2 T_4+T_1 T_2^2 T_4+T_3 T_4-2 T_2 T_3 T_4+T_2^2 T_3 T_4-T_3^2 T_4+T_2 T_3^2 T_4}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{(-1+T_2)(T_2+T_3)}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} \\
S_3 & \frac{-1+T_3}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_3)(T_1-T_1 T_4+T_1 T_2 T_4+T_3 T_4)}{T_1 T_2 T_3 (-1+T_2+T_3) T_4} & \frac{T_3}{T_1 T_2 (-1+T_2+T_3)} \\
S_4 & 0 & \frac{-1+T_4}{T_2 T_3 T_4} & 0 \\
S_u & 0 & 0 & 0 \\
\Sigma & \frac{1}{T_3} & \frac{1}{T_3^2 T_4} & \frac{1}{T_1 T_2^2}
\end{pmatrix}
\right.
$$

```
cert = γ1 // dm[1, 2, 1] // dm[3, 4, 2]
```

$$
\begin{pmatrix}
1 & S_1 & S_2 \\
S_1 & 1 & 0 \\
S_2 & 0 & 1 \\
\Sigma & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

```
alex = (γ1 // dm[4, 3, 3] // dm[3, 2, 2] // dm[2, 1, 1])[[1]]
```

$$
\frac{\left(1-T_1+T_1^2\right)^2}{T_1^2}
$$